Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

05.05.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Lösung des Maiblatts

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeige, dass $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$ ein finales Objekt in der Kategorie der affinen Schemata ist.

Ein Morphismus $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \to (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$ ist dabei ein Paar $(f, f^\#)$, wobei $f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ stetig ist, und $f^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \to f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ ein Garbenmorphisms ist, so dass für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ der induzierte Morphismus

$$f^\flat_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A), \mathfrak{p}}$$

lokal ist.[1]

b) Finde jeweils einen Ring A, so dass der Morphismus $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \to (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$

- genau einen Punkt als Bild hat,
- genau zwei Punkte als Bild hat,
- unendlich viele Punkte als Bild hat, aber nicht surjektiv ist,
- surjektiv ist.

Wie sieht jeweils der Morphismus auf den Halmen aus?

Lösung: a) Wir schreiben kurz $\mathrm{Spec}(A)$ für den topologischen Raum zusammen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} = \mathcal{O}_A$.

Die Aussage folgt aus der allgemeineren Aussage, dass der Funktor $R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$ adjungiert zum Funktor $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ ist[2], d.h. dass gilt

$$\mathrm{Mor}(X, \mathrm{Spec}(R)) \cong \mathrm{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X))$$

(und dass diese Bijektion natürlich in X und R ist). Sei nun speziell $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $R = \mathbb{Z}$. Es gibt genau einen Morphismus von Ringen mit 1 von $\mathbb{Z}$ nach $A = \mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}(A))$. Also ist die rechte Seite einelementig, und damit auch die linke Seite. Damit folgt, dass $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ein finales Objekt in der Kategorie der affinen Schemata ist.

Alternativ bastle man sich aus dem eindeutigen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ einen Schemamorphismus. Wie letztes Semester bereits gesehen, ist

$$F : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \quad x \mapsto \varphi^{-1}(x)$$

[1] $f^\flat$ ist der eindeutige Morphismus in $\mathrm{Hom}(f^{-1} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$, der $f^\# \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ entspricht.

[2] Achtung, diese Funktoren sind kontravariant.

ein stetiger Morphismus von topologischen Räumen. Das soll die zugrundeliegende stetige Abbildung sein. Es fehlt noch ein Garbenmorphismus $F^\# : \mathcal{O}_\mathbb{Z} \to F_* \mathcal{O}_A$. Es reicht, diesen auf den Mengen der Form $D(f)$ zu definieren, denn dann kann man ihn durch Verkleben fortsetzen: Dazu schreibt man eine beliebige offene Menge $U \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ als Vereinigung $U = \bigcup_i D(f_i)$ und definiert für $s \in \mathcal{O}_\mathbb{Z}(U)$ das Bild $\varphi(s)$ als das Amalgam der konsistenten Familie $\varphi_{f_i}(s_{|D(f_i)})$, wobei

$$\varphi_{f_i} : \mathcal{O}_\mathbb{Z}(D(f_i)) \to F_* \mathcal{O}_A(D(f_i)).$$

Man beachte, dass

$$\varphi_{f_i}(s_{|D(f_i)})_{|D(f_i)\cap D(f_j)} = \varphi_{f_i}(s_{|D(f_i)\cap D(f_j)}) = \varphi_{f_j}(s_{|D(f_i)\cap D(f_j)}) = \varphi_{f_j}(s_{|D(f_j)})_{|D(f_i)\cap D(f_j)}$$

gelten soll. Die φ_{f_i} müssen also mit den Restriktionen von $D(f_i)$ nach $D(f_i) \cap D(f_j)$ kommutieren und auf Durchschnitten gleich sein.

Wir müssen also eine Familie von Pfeilen

$$\mathcal{O}_\mathbb{Z}(D(f)) \cong \mathbb{Z}_f \to F_* \mathcal{O}_A(D(f)) = \mathcal{O}_A(F^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_A(D(\varphi(f))) \cong A_{\varphi(f)}$$

konstruieren. Dabei sind $\mathbb{Z}_f$ und $A_{\varphi(f)}$ die bei den multiplikativen Systemen $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, bzw. $\{\varphi(f)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ lokalisierten Ringe. Nun definieren wir $\varphi_f : \mathbb{Z}_f \to A_{\varphi(f)}$ als den eindeutig bestimmten Morphismus aus der UAE der Lokalisierung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_f$; φ_f macht also das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_f \arrow[r, "\varphi_f"'] & A_{\varphi(f)}
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Nun sollte man noch zeigen, dass die so definieren Morphismen auf Durchschnitten zusammenpassen. Es ist $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ für $f, g \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Nach Konstruktion von $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ist die Verkettung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_f \to \mathbb{Z}_{fg}$ gleich dem Morphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{fg}$ und analoges gilt für A, $A_{\varphi(f)}$ und $A_{\varphi(fg)}$. Nun gibt es genau einen Pfeil ψ der

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_f \arrow[r, "\varphi_f"] \arrow[d] & A_{\varphi(f)} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_{fg} \arrow[r, "\psi"'] & A_{\varphi(fg)}
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht (wieder aus der UAE der Lokalisierung $\mathbb{Z}_f \to \mathbb{Z}_{fg}$). Dieser macht aber auch das größere Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_{fg} \arrow[r, "\varphi_{fg} = \psi"'] & A_{\varphi(fg)}
\end{tikzcd}$$

kommutativ, ist also gleich φ_{fg} wegen der Eindeutigkeit des letzteren. Das stellt die Existenz eines Garbenmorphismus sicher.

Zu zeigen bleibt, dass dieser lokal ist. Es sei $x \in \operatorname{Spec}(A)$. Die Abbildung $F_x^\flat$ entsteht durch Halm-Bilden der Hintereinanderschaltung

$$F^{-1}\,\mathcal{O}_\mathbb{Z} \to F^{-1}F_*\,\mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_A\,.$$

Der erste Morphismus ist das Bild von $F^\#$, den zweiten liefert die Adjungiertheit von F^{-1} und F_*: Er ist das Bild von $\mathrm{id} : F_*\,\mathcal{O}_A \to F_*\,\mathcal{O}_A$ unter der Bijektion

$$\operatorname{Hom}(F^{-1}F_*\,\mathcal{F},\mathcal{F}) \cong \operatorname{Hom}(F_*\,\mathcal{F}, F_*\,\mathcal{F}).$$

Da Halm-Bilden gleich dem Funktor i^{-1} für die Inklusion $i : \{x\} \to \operatorname{Spec}(A)$ ist, erhält man einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z},F(x)} \cong i^{-1}F^{-1}\,\mathcal{O}_\mathbb{Z} \to i^{-1}\,\mathcal{O}_A \cong \mathcal{O}_{A,x}\,.$$

Dieser bildet $[U,f] \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z},F(x)}$ auf $[F^{-1}(U), F^\#(f)]$ ab. Nach unserer Konstruktion ist diese Abbildung gegeben durch die Abbildung zwischen den direkten Limiten

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z},F(x)} = \varinjlim_{D(f)\ni F(x)} \mathcal{O}_\mathbb{Z}(D(f)) \to \varinjlim_{D(\varphi(f))\ni x} \mathcal{O}_A(D(\varphi(f))) = \mathcal{O}_{A,x}\,.$$

Dieser Ringhomomorphismus ist der gleiche, wie der durch die UAE der Lokalisierung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{F(x)}$ induzierte Ringhomomorphismus $\varphi_x : \mathbb{Z}_{F(x)} \to A_x$. Das kommt daher, dass wir die Lokalisierung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{F(x)}$ auch als direkten Limes $\varinjlim_{f\notin F(x)} \mathbb{Z}_f$ schreiben können.

φ_x ist lokal: Denn sei M_x das maximale Ideal von A_x, also $M = x \cdot A_x$. Nach Konstruktion von F ist $\varphi^{-1}(x) = F(x)$, also $\varphi_x^{-1}(M_x) = F(x)\,\mathbb{Z}_{F(x)}$.

Ist $G : \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ ein weiterer Schemamorphismus, so erhalten wir Ringhomomorphismen auf den Halmen $G_x^\flat : \mathbb{Z}_{G(x)} \to A_x$. Diese sind lokal, also gilt $(G_x^\flat)^{-1}(M_x) = G(x)\cdot\mathbb{Z}_{G(x)}$. Das Urbild von $G(x)\,\mathbb{Z}_{G(x)}$ unter $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{G(x)}$ ist $G(x)$ und genauso ist das Urbild des maximalen Ideals $M_x \trianglelefteq A_x$ unter $A \to A_x$ gleich x. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "G^\#"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_{G(x)} \arrow[r, "G_x^\flat"'] & A_x
\end{tikzcd}$$

kommutiert, ist $G(x) = (G^\#)^{-1}(x)$. Da außerdem $G^\# = F^\#$ gilt, weil es nur einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to A$ gibt, folgt, dass $G = F$ auf den Punkten von $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ gilt. Außerdem tun $F_x^\flat$ und $G_x^\flat$ für alle x dasselbe, denn der Morphismus $\mathbb{Z}_{F(x)} \to A_x$ stammt aus der UAE der Lokalisierung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{F(x)}$, ist also eindeutig. Damit ist $F = G$ als Schemamorphismus.

b)

- Genau eine Punkt als Bild erhält man, wenn man als $A = k$ einen Körper wählt. Denn $\operatorname{Spec}(k)$ besteht nur aus einem Punkt $x = (0)$ und $F(x) = (p)$, wobei p die Charakteristik von k ist. Der Morphismus auf den Halmen ist

  $$\mathcal{O}_{\mathbb{Z},(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathcal{O}_{k,(0)} = k, \quad f/g \mapsto \varphi(f)/\varphi(g),$$

  wobei $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ beim Primideal (p) ist.

- Genau zwei Punkte erhält man für $A = \mathbb{Z}_{(p)}$ mit $(p) \neq (0)$. Das ist ein diskreter Bewertungsring, er enthält alle Brüche aus $\mathbb{Q}$, deren p-Bewertung nicht negativ ist. Man benutze zum Beispiel Aufgabe 2 von Blatt 6 aus dem letzten Semester, um zu schließen, dass $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \{(0),(p)\}$. Es ist $F(0) = (0)$ und $F(p) = (p)$. Auf den einzelnen Halmen heißt das einmal

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z},(0)} \cong \mathbb{Q} \to \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{(p)},(0)} \cong (\mathbb{Z}_{(p)})_{(0)} \cong \mathbb{Q}\ , \quad a \mapsto a.$$

  Auf dem anderen Halm ist

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z},(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{(p)},(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$$

  ebenfalls die Identität.

- Der Lokalisierungsmorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_f$ hat (wieder mit Aufgabe 2 von Blatt 6 aus dem letzten Semester) als Bild alle Primideale in $\mathbb{Z}$ außer den endlich vielen Primteilern von f. Damit hat das Bild von $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_f) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ unendliche Kardinalität. Auf den Halmen ist der Morphismus $(\varphi_f)_{(p)}$ die Identität.

- Natürlich liefert der Isomorphismus $\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus von $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ nach $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, da $\operatorname{Spec}(\cdot)$ ein Funktor ist. Dieser ist insbesondere surjektiv. Auf den Halmen passiert hier (wieder) nichts Spannendes.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei A ein kommutativer Ring mit 1. Zeige:

a) Ein Element $e \in A$ ist genau dann idempotent (d.h. es gilt $e^2 = e$), wenn $1 - e$ idempotent ist.

b) Gibt es in A zwei Elemente $e_1, e_2 \notin A^\times$, so dass $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2$ nilpotent ist, so enthält A mindestens drei idempotente Elemente.

   Hinweis: Betrachte das Ideal $I_n = (e_1^n, e_2^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\operatorname{Spec}(A)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A höchstens zwei idempotente Elemente enthält.

d) Gib einen Ring A an, sodass $\operatorname{Spec}(A)$ nicht zusammenhängend ist.

Lösung: a) Es gilt $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2$. Ist $e^2 = e$, so folgt $(1-e)^2 = 1 - e$, und umgekehrt folgt aus $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$ auch $e^2 = e$.

b) Wegen $e_1 + e_2 = 1$ ist das Radikal von I_n der ganze Ring A. Wäre $I_n \neq A$, so wäre I_n in einem maximalen Ideal m von A enthalten, also wäre auch sein Radikal in m, und wir erhielten einen Widerspruch. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Elemente $\alpha_n, \beta_n \in A$ mit

$$\alpha_n e_1^n + \beta_n e_2^n = 1.$$

Da $e_1 e_2$ nilpotent ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $(e_1 e_2)^k = 0$. Damit ist

$$x = \alpha_k e_1^k = 1 - \beta_k e_2^k$$

idempotent, denn

$$x^2 = \alpha_k e_1^k (1 - \beta_k e_2^k) = \alpha_k e_1^k - \alpha_k \beta_k (e_1 e_2)^k = x.$$

Wäre $x = 0$, so wäre $\beta_k e_2^k = 1$, also e_2 eine Einheit, was ausgeschlossen war. Genauso kann x nicht 1 sein. Damit enthält also A mindestens drei idempotente Elemente $0, 1, x$.

c) Es sei $\operatorname{Spec}(A)$ zusammenhängend. Angenommen es gäbe in A drei idempotente Elemente. Da 0 und 1 auf alle Fälle idempotente Elemente sind, gibt es also in A ein weiteres Element $x \notin \{0, 1\}$, das idempotent ist. Nach a) ist $1 - x$ ebenfalls idempotent. Es sei $V_1 = V(x)$ und $V_2 = V(1 - x)$. V_1 und V_2 sind nichtleer, denn sonst wären x, bzw. $1 - x$ Einheiten (man argumentiere wie bei b) am Anfang); wäre aber x eine Einheit, so würde aus $x^2 = x$ folgen, dass $x = 1$ ist, im Widerspruch zur Annahme. Analog würde aus $1 - x \in A^\times$ und $(1 - x)^2 = (1 - x)$ folgen, dass $x = 0$.

Angenommen es gäbe ein $\mathfrak{p} \in V(x) \cap V(1-x)$. Für dieses gälte x und $1-x \in \mathfrak{p}$; also ist auch $1 \in \mathfrak{p}$, ein Widerspruch. Andererseits ist $V(x) \cup V(1 - x) = V(x(1 - x)) = V(0) = \operatorname{Spec}(A)$. Damit haben wir eine disjunkte Zerlegung von $\operatorname{Spec}(A)$ in abgeschlossene nichtleere Teilmengen gefunden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es höchstens zwei idempotente Elemente in A.

Nun sei $\operatorname{Spec}(A)$ nicht zusammenhängend. Wir finden ein drittes idempotentes Element. Sei $\operatorname{Spec}(A) = V_1 \cap V_2$ eine Zerlegung in abgeschlossene nichtleere Teilmengen. Es ist $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$. Da ihr Durchschnitt $V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2) = \emptyset = V(1)$ ist, folgt $I_1 + I_2 = A$, und es gibt $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$ mit $e_1 + e_2 = 1$. Andererseits ist weder e_1 noch e_2 eine Einheit, denn beide Verschwindungsmengen sind nichtleer. Außerdem ist $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = \operatorname{Spec}(A) = V(\sqrt{0})$ gleich der Verschwindungsmenge des Nullradikals. Also folgt $I_1 \cdot I_2 \subseteq \sqrt{0}$ und damit ist $e_1 e_2$ nilpotent.

d) Es sei A ein beliebiger Ring mit 1 und $B = A \times A$ mit der komponentenweisen Verknüpfung. Dann ist $(1, 0)$ ein idempotentes Element in B, dass weder $(0, 0)$ noch $(1, 1)$ ist. Also ist B nach c) nicht zusammenhängend.