Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

17.05.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Lösungen zum Langen Übungsblatt

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei Spec(A) ein affines Schema. Zeige, dass die Abbildung $x \mapsto \overline{\{x\}}$ eine Bijektion zwischen Spec(A) und den nichtleeren, abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von Spec(A) liefert.

Lösung: Es sei M die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von $\operatorname{Spec} A$. Zu zeigen ist, dass

$$\Phi : \operatorname{Spec} A \to M\,, \quad x \mapsto \overline{\{x\}}$$

eine Bijektion ist.

Zunächst ist Φ wohldefiniert, denn $\{x\}$ ist irreduzibel und nichtleer, und damit auch der Abschluss von $\{x\}$. Als nächstes behaupten wir dass $\overline{\{x\}} = V(x)$ gilt. Denn wenn es $p \in V(x)$ mit $p \notin \overline{\{x\}}$ gäbe, dann gäbe es eine offene Umgebung $U \subset \operatorname{Spec} A$ von p mit $U \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$. Insbesondere gäbe es ein $f \in A$ mit $p \in D(f) \subseteq U$. Also wäre $x \in V(f)$ und wegen $p \in V(x)$ würde $f \in x \subseteq p$ folgen, ein Widerspruch.

Also folgt aus $\Phi(y) = \Phi(x)$, dass $y \in \overline{\{x\}} = V(x)$ ist, und damit $x \subseteq y$. Analog sieht man $y \subseteq x$, also insgesamt $x = y$.

Sei schließlich $V \in M$. Dann ist $V = \Phi(x)$ für ein $x \in \operatorname{Spec} A$, denn nach Vorlesung ist jede abgeschlossene, nichtleere, irreduzible Menge von der Form $V(x) = \overline{\{x\}}$ für ein Primideal $x \subset A$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei S ein Schema mit einer offenen Überdeckung $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Außerdem seien X und Y Schemata mit Schemamorphismen $f : X \to S$ und $g : Y \to S$. Wir setzen $X_i = f^{-1}(S_i)$ und $Y_i = g^{-1}(S_i)$. Zeige: Sofern die Faserprodukte existieren, gilt für jedes $i \in I$

$$X_i \times_{S_i} Y_i \cong X_i \times_S Y.$$

Lösung: Wir zeigen zunächst folgende Hilfsaussagen.

Behauptung 1: Offene Immersionen sind Monomorphismen.

Sei $i : U \to Y$ eine offene Immersion. Per Definition ist i also ein Isomorphismus auf sein Bild, dass ein offenes Unterschema von Y ist. Seien $a, b : Z \to U$ zwei weitere Morphismen mit $ia = ib$. i hat eine Inverse $i^{-1} : i(U) \to U$. Wenn wir diese auf die Gleichung $ia = ib$ loslassen, so erhalten wir $a = b$.

Behauptung 2: Wenn $\eta : Z \to Y$ ein Schemamorphismus ist mit $\eta(Z) \subset U$ und U eine offene Teilmenge von Y ist, dann gibt es genau einen Schemamorphismus $\theta : Z \to U$ mit $\eta = i \circ \theta$. Hierbei sei $i : U \to Y$ die Inklusion und U werde zu einem Schema durch die Restriktion $i^{-1}\,\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y|U} = \mathcal{O}_U$ der Strukturgarbe von Y.

Topologisch definieren wir θ als η. Dann ist klar, dass θ stetig ist. Weiter brauchen wir einen Garbenmorphismus $\theta^\# : \mathcal{O}_U \to \theta_*\,\mathcal{O}_Z$. Für eine offene Menge $W \subset U$ ist $\eta^{-1}(U) = \theta^{-1}(U)$. Also können wir

$$\theta^\#_W : \mathcal{O}_U(W) = \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_Z(\theta^{-1}(W)) = \mathcal{O}_Z(\eta^{-1}(W))$$

gleich $\eta^\#_W$ wählen. Das liefert einen Garbenmorphismus.

Da $\eta^\#_p$ für alle $p \in Z$ lokal ist, und θ die Einschränkung von η auf U ist, ist auch $\theta^\#_p$ für alle $p \in Z$ lokal. Weiter ist nachzurechnen, dass $\eta^\# = i_*(\theta^\#) \circ i^\#$ gilt. Es sei $W \subset Y$ offen und $s \in \mathcal{O}_Y(W)$. Dann ist $i^\#_W(s) = s_{|U\cap W} \in \mathcal{O}_U(i^{-1}(W))$ und

$$i_*(\theta^\#)_W(s_{U\cap W}) = \theta^\#_{U\cap W}(s_{|U\cap W}) = \eta^\#_{U\cap W}(s_{|U\cap W}) = \eta^\#(s)_{|U\cap W}.$$

Aber die Restriktion $\eta_*\,\mathcal{O}_Z(W) \to \eta_*\,\mathcal{O}_Z(U \cap W)$ ist die Identität, da $\eta^{-1}(W) = \eta^{-1}(U \cap W)$. Das zeigt, dass

$$\eta^\# = i_*(\theta^\#) \circ i^\#$$

gilt.

Die Eindeutigkeit folgt mit Behauptung 1, denn i ist eine offene Immersion.

Behauptung 3: Y_i ist das Faserprodukt von Y mit S_i über S. Wir müssen also zeigen, dass es zu einem Schema Z und $p : Z \to Y$, $q : Z \to S_i$ mit $gp = \iota q$ einen eindeutigen Morphismus $\theta : Z \to Y_i$ gibt mit $\iota'\theta = p$ und $g\theta = q$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[dr, dotted, "\theta"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& Y_i \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& S_i \arrow[r, "\iota"'] & S
\end{tikzcd}$$

Für $z \in Z$ gilt $q(z) \in S_i$ und $\iota q(z) = q(z) = gp(z)$. Also ist $p(z) \in Y_i = g^{-1}(S_i)$. Da Y_i offen ist, erhalten wir nach Behauptung 2 einen eindeutigen Morphismus $\theta : Z \to Y_i$, der $\iota'\theta = p$ erfüllt. Dieser bringt auch das untere Dreieck zum Kommutieren, denn

$$\iota g\theta = g\iota'\theta = gp = \iota q.$$

Da ι eine offene Immersion ist, ist ι nach Behauptung 1 ein Monomorphismus, also folgt $g\theta = q$ und wir haben Behauptung 3 gezeigt.

Behauptung 4: Die Verkettung zweier cartesischer Diagramme ist cartesisch.

Dabei heiße ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

cartesisch, wenn $Z \cong X \times_S Y$ gilt. In diesem Fall macht man zuweilen auch ein $\square$ in die Mitte des Diagramms.

Die Behauptung lautet genauer: Wenn die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g'"] \\ S \arrow[r, "f'"'] & T \end{tikzcd}$$

cartesisch sind, dann auch

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q_2 p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & W \arrow[d, "g'"] \\ X \arrow[r, "f'f"'] & T \end{tikzcd}$$

Zum Beweis: Seien ein Schema A mit Morphismen $r : A \to W$ und $s : A \to X$ gegeben, so dass $g'r = f'fs$ gilt (siehe auch untenstehendes Diagramm). Umklammern zeigt, dass $fs : A \to S$ und $r : A \to W$ ein Paar von Pfeilen sind, auf die wir die UAE von Y anwenden können. Wir erhalten also genau einen Pfeil $\theta : A \to Y$ mit $q_2\theta = r$ und $g\theta = fs$. Nun machen wir mit der UAE von Z weiter, was uns die Gleichung $g\theta = fs$ erlaubt. Wir erhalten genau einen Morphismus $\vartheta : A \to Z$ mit $p_2\vartheta = \theta$ und $p_1\vartheta = s$. Also ist

$$q_2p_2\vartheta = q_2\theta = r.$$

Damit ist $\vartheta : A \to Z$ ein Pfeil für die UAE von $X \times_T W$. Es bleibt zu zeigen, dass es nicht zwei verschiedene Pfeile $\vartheta_1, \vartheta_2 : A \to Z$ geben kann mit

$$q_2p_2\vartheta_i = r \quad \text{und} \quad p_1\vartheta_i = s$$

für $i = 1, 2$. Aber dann wären $p_2\vartheta_i$ zwei Pfeile wie in der UAE von Y, denn

$$q_2(p_2\vartheta_i) = r$$

und

$$gp_2\vartheta_i = fp_1\vartheta_i = fs.$$

Also ist $p_2\vartheta_1 = p_2\vartheta_2 = \theta$ wegen der Eindeutigkeit von θ. Nun schlägt aber die UAE von Z zu. Folglich gilt $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[drrr, bend left, "r"] \arrow[drr, dotted, "\theta"] \arrow[dr, dotted, "\vartheta"'] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & & \\
& Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[d, "g'"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & S \arrow[r, "f'"'] & T
\end{tikzcd}
$$

Lösung der Aufgabe: Nun folgt die Aussage der Aufgabe, indem man das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
X_i \times_{S_i} Y_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X_i \arrow[r, "f"'] & S_i \arrow[r, "\iota"'] & S
\end{tikzcd}
$$

betrachtet. Das linke Quadrat ist per Definition cartesisch und das rechte nach Behauptung 2. Mit Behauptung 3 folgt, dass auch das gesamte Rechteck cartesisch ist, d.h. links oben steht (bis auf kanonische Isomorphie) auch das Faserprodukt $X_i \times_S Y$, was zu zeigen war.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei X ein Schema und K ein Körper.

a) Extrahiere aus einem Schemamorphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$ einen Punkt $x \in X$ und eine Körpererweiterung $\kappa(x) \to K$ des Restklassenkörpers $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}$.

b) Konstruiere umgekehrt zu jedem Paar (x, i), wobei $x \in X$ ein Punkt und $i : \kappa(x) \to K$ eine Körpererweiterung ist, einen Schemamorphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$.

Die Menge $\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(K), X) = X(K)$ *heißt die Menge der K-wertigen Punkte von X.*

Lösung: a) Sei $\varphi : \mathrm{Spec}\, K \to X$ ein Schemamorphismus. Da $\mathrm{Spec}\, K = \{(0)\}$, ist $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{x\}$ einpunktig. Außerdem haben wir einen Garbenmorphismus $\varphi^\# : \mathcal{O}_X \to \varphi_* \mathcal{O}_K$. Dieser induziert einen lokalen Morphismus $\varphi^\#_{(0)} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{K,(0)} = K$ auf den Halmen. Also ist $(\varphi^\#_{(0)})^{-1}(m_{X,x}) = (0)$ wobei $m_{X,x}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Damit faktorisiert $\varphi^\#_{(0)}$ über einen Morphismus $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \to K$. Dieser ist nicht 0, sonst wäre $\varphi^\#_{(0)}$ nicht lokal gewesen, also ist er injektiv und damit eine Körpererweiterung von $\kappa(x)$.

b) Wir definieren einen Morphismus topologisch durch $\varphi((0)) = x$. Das liefert eine stetige Abbildung. Den Garbenmorphismus $\varphi^\# : \mathcal{O}_X \to \varphi_* \mathcal{O}_K$ definieren wir folgendermaßen. Für $U \subset X$ mit $x \notin U$ ist $\varphi^\#_U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_K(\varphi^{-1}(U)) = \mathcal{O}_K(\emptyset)$ notwendig der 0-Pfeil. Ansonsten, also für $x \in U \subset X$, sei $\varphi^\#_U$ die Komposition

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} = \kappa(x) \to K,$$

wobei der letzte Pfeil durch i gegeben ist. Mit der Tatsache, dass $\mathcal{O}_{X,x}$ der injektive Limes der $\mathcal{O}_X(U)$ (für U offen, $x \in U$) ist, folgt, dass dies einen Garbenmorphismus liefert. Auf dem einzigen Halm ist dieser lokal, denn $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{K,(0)}$ faktorisiert per Definition über $\kappa(x) \to K$, was bedeutet, dass $(\varphi_x^\#)^{-1}((0)) = m_{X,x}$ ist.