Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

31.05.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen    Dipl.-Math. André Kappes

# Algebraische Geometrie 2 – Lösungen zum Trennblatt

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Es sei $k$ ein Körper und $X$ die affine Gerade über $k$ mit doppeltem Nullpunkt. $X$ ist also das Schema, das entsteht, wenn wir $U = \operatorname{Spec} k[X]$ mit $V = \operatorname{Spec} k[Y]$ entlang $D(X)$ und $D(Y)$ vermöge des Isomorphismus $k[Y, Y^{-1}] \to k[X, X^{-1}]$, $Y \mapsto X$ verkleben.

Zeige, dass $X$ nicht separiert über $k$ ist.

*Zusatzaufgabe (2 Extrapunkte): Wieso ist aber $\mathbb{P}^1(k) = \operatorname{Proj}(k[X_0, X_1])$ von Aufgabe 1 des Langen Übungsblatts separiert über $k$?*

**Lösung:** Das Schema $X$ wird überdeckt von zwei offenen Teilmengen $X = U_1 \cup U_2$, wobei $h_1 : U_1 \to \operatorname{Spec} k[X]$ und $h_2 : U_2 \to \operatorname{Spec} k[Y]$ Isomorphismen sind. Außerdem wissen wir, dass $h_1(U_1 \cap U_2) = D(X)$ und $h_2(U_1 \cap U_2) = D(Y)$ ist, und dass die Komposition

$$h_2 \circ h_1^{-1} : D(X) \to D(Y)$$

gegeben ist durch den Ringhomomorphismus

$$k[Y, Y^{-1}] \to k[X, X^{-1}]\,, \quad Y \mapsto X, \quad Y^{-1} \mapsto X^{-1}.$$

Die Topologie eines Schemas $X$ ist vollständig durch die Topologie auf einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ beschrieben, d.h. $Z \subset X$ ist abgeschlossen, genau dann, wenn $Z \cap U_i$ für alle $i \in I$ abgeschlossen ist.

Deshalb ist die Strategie, auch $X \times_k X$ durch offene (affine) Mengen zu überdecken und herauszuarbeiten, was für die Separiertheit schief geht. (Wir schreiben hier und im Folgenden kurz $k$ für $\operatorname{Spec} k$.)

Im Folgenden sei zunächst $X \to k$ ein beliebiges Schema mit einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

**Schritt 1:** Es seien $\alpha_i : U_i \to X$ die Inklusionen. Aus der UAE des Faserprodukts $X \times_k X$ erhält man einen Morphismus $\alpha_{ij} : U_i \times_k U_j \to X \times_k X$. Wir zeigen, dass $\alpha_{ij}$ eine offene Immersion auf $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$ ist. Hierbei seien $p_i : X \times_k X \to X$ die Projektionen.

Wir zeigen, dass $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$ die UAE von $U_i \times_k U_j$ hat. Dazu seien ein Schema $T$ mit $k$-Morphismen $r : T \to U_i$ und $s : T \to U_j$ vorgegeben.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\theta'"] \arrow[drrr, bend left, "s"] \arrow[dddr, bend right, "r"'] & & & \\
& p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j) \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "\subset"'] \arrow[dd, "p_1"'] & & U_j \arrow[d, "\alpha_j"] \\
& & X \times_k X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d] \\
& U_i \arrow[r, "\alpha_i"] & X \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

Aus der UAE von $X \times_k X$ angewendet auf $\alpha_i \circ r$ und $\alpha_j \circ s$ erhalten wir $\theta : T \to X \times_k X$, das diese Morphismen faktorisiert. Daraus folgt, dass $\theta(T) \subset p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j)$ gilt, wir also einen Morphismus $\theta' : T \to p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j)$ erhalten. Aus der Eindeutigkeit von $\theta$ folgt die von $\theta'$.

Damit haben wir $V_{ij} = \alpha_{ij}(U_i \times_k U_j)$ als ein offenes Unterschema von $X \times_k X$ identifiziert. Die $V_{ij}$ überdecken $X \times_k X$, denn wenn $x \in X \times_k X$ ist, so ist $p_1(x) \in U_i$ und $p_2(x) \in U_j$ für gewisse $i, j$.

**Schritt 2:** $X$ ist genau dann separiert, wenn für alle $i, j \in I$ der Morphismus $\alpha_{ij}^{-1} \circ \Delta_{X|U_i \cap U_j}$ eine abgeschlossene Immersion ist.

Denn zunächst ist $\Delta_X : X \to X \times_k X$ genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn $\Delta_X(X)$ abgeschlossen ist. Weiter ist $\Delta_X(X)$ genau dann abgeschlossen, wenn $\Delta_X(X) \cap V_{ij}$ für alle $i, j$ abgeschlossen ist. Nun gilt

$$\Delta_X^{-1}(V_{ij}) = \Delta_X^{-1}(p_1^{-1}(U_i)) \cap \Delta_X^{-1}(p_2^{-1}(U_j)) = U_i \cap U_j.$$

Also ist $\Delta_X(U_i \cap U_j) = \Delta_X(X) \cap V_{ij}$. Damit folgt die Behauptung von Schritt 2.

**Schritt 3:** $\alpha_{ij}^{-1} \circ \Delta_{X|U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \to U_i \times_k U_j$ wird induziert von den Inklusionen $\beta_i : U_i \cap U_j \to U_i$ und $\beta_j : U_i \cap U_j \to U_j$.

Das folgt unter Zuhilfenahme der UAE von $U_i \times_k U_j$ aus der Tatsache, dass $\beta_i = p_1 \circ \alpha_{ij}^{-1} \circ \Delta_{X|U_i \cap U_j}$ und $\beta_j = p_2 \circ \alpha_{ij}^{-1} \circ \Delta_{X|U_i \cap U_j}$ gilt.

Nun haben wir alles für die Lösung der Aufgabe zusammen. Konkret ist bei uns $U_1 \cap U_2 \cong \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$. Die Inklusionen $\beta_i : U_1 \cap U_2 \to U_i$ $(i = 1, 2)$ übersetzen sich zu

$$\operatorname{Spec} k[t, t^{-1}] \to \operatorname{Spec} k[X], \quad t \leftarrow\!\shortmid X$$

und

$$\operatorname{Spec} k[t, t^{-1}] \to \operatorname{Spec} k[Y], \quad t \leftarrow\!\shortmid Y.$$

Damit ist der Pfeil $\alpha_{ij}^{-1} \circ \Delta_{X|U_i \cap U_j}$ ein Schemamorphismus zwischen den affinen Schemata $\operatorname{Spec} k[t, t^{-1}] \cong U_1 \cap U_2$ und $\operatorname{Spec} k[X] \times_k \operatorname{Spec} k[Y] \cong U_1 \times_k U_2$ und als solcher gegeben durch den Ringhomomorphismus

$$\varphi : k[X] \otimes_k k[Y] \cong k[X, Y] \to k[t, t^{-1}], \quad X \mapsto t, \quad Y \mapsto t.$$

Das ist keine abgeschlossene Immersion, denn $\varphi$ ist nicht surjektiv. Genauer faktorisiert $\varphi$ über $k[X,Y] \to k[X,Y]/(X-Y) \cong k[t] \to k[t,t^{-1}]$. Das Bild von $\operatorname{Spec} k[t,t^{-1}] \to \operatorname{Spec} k[t]$ ist alles außer $(t)$. Damit ist das Bild von $\operatorname{Spec}\varphi$ gleich $V(X-Y) \setminus \{(X,Y)\}$ und das ist nicht abgeschlossen in $\operatorname{Spec} k[X,Y]$.

Nun können wir noch zeigen, dass $Y = \mathbb{P}^1(k)$ separiert über $k$ ist. $Y$ wird ebenfalls überdeckt von $U_1 \cong \operatorname{Spec} k[X]$ mit $U_2 \cong \operatorname{Spec} k[Y]$ mit $U_1 \cap U_2 \cong k[t,t^{-1}]$, nur sind dieses Mal die Inklusionen $U_1 \cap U_2 \to U_i$ gegeben durch

$$\operatorname{Spec} k[t,t^{-1}] \to \operatorname{Spec} k[X]\,, \quad t \hookleftarrow X$$

und

$$\operatorname{Spec} k[t,t^{-1}] \to \operatorname{Spec} k[Y]\,, \quad t^{-1} \hookleftarrow Y.$$

Wir müssen überprüfen, dass für alle $i,j \in \{1,2\}$ der Morphismus

$$\alpha_{ij}^{-1} \circ \Delta_{X U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \to U_i \times_k U_j$$

eine abgeschlossene Einbettung ist (oder zumindest abgeschlossenes Bild hat). Aber für $i = j$ ist hier nichts zu tun, denn $U_i$ ist affin, $U_i \to U_i \times_k U_i$ ist die Diagonale, also eine abgeschlossene Einbettung. Bleibt also ohne Einschränkung der Fall $i = 1$ und $j = 2$. Dann erhält man den Morphismus $U_1 \cap U_2 \to U_1 \times_k U_2$ aus dem Ringhomomorphismus

$$\psi : k[X] \otimes_k k[Y] \to k[t,t^{-1}]\,, \quad X \mapsto t, \quad Y \mapsto t^{-1}.$$

Dieser ist surjektiv, also nach Aufgabe 1 b) von Blatt 5 eine abgeschlossene Einbettung.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Es seien $S$ ein Schema und $X$, $Y$ zwei $S$-Schemata. Weiter seien zwei Morphismen $f$, $g : X \to Y$ gegeben, die auf einer offenen, dichten Teilmenge von $X$ übereinstimmen. Zeige:

a) Ist $X$ reduziert und $Y$ separiert über $S$, so gilt $f = g$.

b) Die Aussage ist falsch, wenn $X$ nicht reduziert ist oder wenn $Y$ nicht separiert ist.

**Lösung:** a) Es sei $U \subset X$ die offene Menge, auf der $f = g$ (als Schemamorphismen) gilt. Wir betrachten den Morphismus $h = (f,g)_S$ der von den $S$-Morphismen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ induziert wird. Es gilt also $p_1 \circ (f,g)_S = f$ und $p_2 \circ (f,g)_S = g$, wobei $p_i : Y \times_S Y \to Y$ die beiden Projektionen seien. Es sei $j : U \to X$ die Inklusion. Dann faktorisieren $p_i(f,g)_S \circ j$ $(i = 1,2)$ den Morphismus $f \circ j = g \circ j : U \to Y$. Also ist $(f,g)_S \circ j = (f \circ j, g \circ j)_S$.

Desweiteren gilt: Ist $m : T \to Z$ ein $S$-Schemamorphismus, so ist $(m,m)_S = \Delta_Z \circ m$. Das folgt sofort aus der UAE, denn $p_i \Delta_Z = \mathrm{id}_Z$ nach Konstruktion von $\Delta_Z = (\mathrm{id},\mathrm{id})_S$. Deshalb ist $p_i \circ \Delta_Z \circ m = m$ für $i = 1,2$, was wegen der Eindeutigkeit von $(m,m)_S$ die Gleichheit $\Delta_Z \circ m = (m,m)_S$ nachsichzieht.

Insgesamt schließen wir also

$$h \circ j = (f,g)_S \circ j = (f \circ j, g \circ j)_S = (f \circ j, f \circ j)_S = \Delta_Y \circ f \circ j.$$

Damit gilt mengenmäßig $hj(U) \subset \Delta_Y(Y)$, bzw. $U \subset h^{-1}(\Delta_Y(Y))$. Da $Y \to S$ separiert ist und $h$ stetig ist, ist $h^{-1}(\Delta_Y(Y))$ abgeschlossen und damit gleich $X$, da $U$ dicht in $X$ ist.

Damit landet $h(X)$ in $\Delta_Y(Y)$. Nun gilt für $y \in \Delta_Y(Y)$, dass $p_1(y) = p_2(y)$. Somit ist $f(x) = p_1(f,g)_S(x) = p_2(f,g)_S(x) = g(x)$. Also sind $f$ und $g$ als topologische Abbildungen gleich.

Es bleibt zu zeigen, dass $f^\# = g^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X = g_* \mathcal{O}_X$ ist, oder – was äquivalent dazu ist – dass $f^\# - g^\# = 0$ gilt.

**Behauptung:** Wenn $f = g : W \to V$ gilt, wobei $V$ alle affinen, offenen Teilmengen von $Y$ durchläuft und $W$ alle affinen, offenen Teilmengen von $f^{-1}(V)$ durchläuft, dann ist $f = g$ auf $X$.

Denn es sei $V' \subset Y$ offen, $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine Überdeckung durch affine, offene Mengen und $s \in \mathcal{O}_Y(V')$. Wir betrachten $t = (f^\#_{V'} - g^\#_{V'})(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V'))$. Dann gilt wegen der Garbeneigenschaft, dass $t = 0$ genau dann, wenn $t_i = t_{|f^{-1}(V_i \cap V')} = 0$ für alle $i \in I$ ist. Wir überdecken $f^{-1}(V_i \cap V')$ mit offenen, affinen Mengen $W_j$ und betrachten die Einschränkung $t_{i|W_j}$. Ist diese gleich 0 für alle $j$, so ist $t_i$ und damit $t = 0$.

Nun sei $\alpha_j : W_j \to f^{-1}(V_i \cap V')$ die Inklusion. Nach Voraussetzung ist $f \circ \alpha_j = g \circ \alpha_j : W_j \to V_i$ und der Garbenmorphismus, der dazu gehört ist

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\# = g^\#} f_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{f_*(\alpha_j^\#)} (fj)_* \mathcal{O}_X$$

$\alpha_j^\#$ ist die Einschränkung $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{W_j}$. Beide Garbenmorphismen $(f \circ \alpha_j)^\#$, $(g \circ \alpha_j)^\#$ sind nach Voraussetzung gleich und ihre Differenz sendet den Schnitt $s_{|V_i \cap V'}$ nach $t_{i|W_j}$. Daraus folgt die Behauptung.

Es sei also ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec} B$ und $Y = \operatorname{Spec} A$. Weiter seien $\varphi$ und $\psi : A \to B$ die zu $f$ bzw. $g$ gehörenden Ringhomomorphismen. Da $f$ und $g$ als Garbenmorphismen auf einer offenen, dichten Teilmenge $U \subset X$ übereinstimmen, gilt insbesondere für alle $p \in U$, dass

$$\varphi_p = \psi_p : A_{\varphi^{-1}(p)} \to B_p.$$

Es sei $a \in A$. Wir nehmen an, dass $\varphi(a) \neq \psi(a)$ gilt und betrachten $D(\varphi(a) - \psi(a))$. Wäre diese Menge nichtleer, so gäbe es insbesondere ein $q \in U \subset \operatorname{Spec} B$ mit $q \in D(\varphi(a) - \psi(a))$, denn $U$ ist dicht. Nun ist in der Lokalisierung bei $q$

$$0 = \varphi_q(\tfrac{a}{1}) - \psi_q(\tfrac{a}{1}) = \frac{\varphi(a) - \psi(a)}{1}.$$

Also gäbe es ein $t \notin q$ mit $t(\varphi(a) - \psi(a)) = 0 \in q$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $q$ ein Primideal ist. Folglich ist $D(\varphi(a) - \psi(a)) = \emptyset$. Das bedeutet aber $\varphi(a) - \psi(a) \in \sqrt{0_B}$ und $\sqrt{0_B} = \{0\}$, denn $B$ ist nach Voraussetzung reduziert. Also ist $\varphi = \psi$ und damit $f = g$ auf ganz $X$.

b) Ein nichtsepariertes Schema ist zum Beispiel die Gerade mit doppeltem Nullpunkt aus Aufgabe 1. Dies sei unsere Wahl für $Y$. Für $X$ wählen wir $\operatorname{Spec} k[x]$. Es ist $Y = U_1 \cup U_2$ wie in Aufgabe 1 und $f : \operatorname{Spec} k[x] \to U_1$ und $g : \operatorname{Spec} k[x] \to U_2$ die zugehörigen Isomorphismen. Die Verknüpfung der Einschränkungen $f_{|D(x)} : D(x) \to U_1 \cap U_2$ und $(g^{-1})_{|U_1 \cap U_2} : U_1 \cap U_2 \to D(x)$ ist die Identität, also sind $f$ und $g$ auf der offenen, dichten Teilmenge $D(x)$ gleich. Aber $f((x)) \neq g((x))$.

Das nichtreduzierte Schema $\operatorname{Spec} k[x]/(x^2)$ ist leider etwas zu klein für unsere Zwecke. Wir vergrößern es zu $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy, y^2)$. Wir schreiben $\overline{x}$ und $\overline{y}$ für die entsprechenden Restklassen in $k[x,y]$.

Für $Y$ wählen wir $\operatorname{Spec} k[x,y]$. Dann sind

$$\varphi : k[x,y] \to k[x,y]/(xy,y^2)\,, \quad x \mapsto \overline{x}\,, \quad y \mapsto \overline{y}$$

und

$$\psi : k[x,y] \to k[x,y]/(xy,y^2)\,, \quad x \mapsto \overline{x}\,, \quad y \mapsto 0$$

zwei unterschiedliche Ringhomomorphismen, liefern also unterschiedliche Schemamorphismen

$$f : \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,y^2) \to \operatorname{Spec} k[x,y]$$

und

$$g : \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,y^2) \to \operatorname{Spec} k[x,y].$$

Diese sind beide abgeschlossene Immersionen mit Bild jeweils $V(xy,y^2) = V(y) \subset \operatorname{Spec} k[x,y]$, also die "$x$-Achse" in der affinene Ebene. Weiter ist $D(x) \cap V(y)$ offen und dicht in $V(y)$, also auch $D(\overline{x}) = f^{-1}(D(x)) = g^{-1}(D(x)) \subset \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,y^2)$ offen und dicht. Wir behaupten dass $f$ und $g$ auf $D(\overline{x})$ übereinstimmen. Dazu reicht es, zu zeigen, dass die induzierten Morphismen

$$\varphi_x = \psi_x : k[x,y,x^{-1}] \to (k[x,y]/(xy,y^2))_{\overline{x}}$$

übereinstimmen. Aber im Ziel gilt nun $\overline{xy} = 0$ und $0 = \overline{x}^{-1}\overline{xy} = \overline{y}$, also stimmen $\varphi_x$ und $\psi_x$ auf $x$ und $y$ – und damit überall – überein.