Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

07.06.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Lösungen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Alle Schemata in dieser Aufgabe seien noethersch. Zeige:

a) Die Verkettung von separierten Morphismen ist separiert.

b) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Schemamorphismen, und ist $g \circ f$ separiert, so auch f.

c) Die Eigenschaft, separiert zu sein, ist stabil unter Basiswechsel.

Lösung: Hier fehlte noch die Lösung des a)-Teils, der Rest wurde in der Übung behandelt. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei separierte Schemamorphismen. Zu zeigen ist, dass $g \circ f$ separiert ist. Dazu betrachten wir ein Bewertungsdiagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r, "\beta"'] \arrow[uur, bend left, "h_1"] \arrow[uur, bend right, "h_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

mit $T = \operatorname{Spec} R$, $U = \operatorname{Spec} K$, einem Bewertungsring R und seinem Quotientenkörper K. Zu zeigen ist, dass $h_1 = h_2$ gilt. Wir bauen daraus ein Bewertungsdiagramm für g

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f \circ \alpha"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, bend left, "f \circ h_1"] \arrow[ur, bend right, "f \circ h_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

Da $g \circ f \circ h_i = \beta$ und $f \circ h_i \circ i = f \circ \alpha$ (für $i = 1, 2$) gilt, haben wir wirklich wieder ein Bewertungsdiagramm. Aufgrund der Separiertheit von g ist $f \circ h_1 = f \circ h_2 : T \to Y$. Damit erhalten wir ein weiteres Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[ur, bend left, "h_1"] \arrow[ur, bend right, "h_2"'] \arrow[r, "f \circ h_1 = f \circ h_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

das wiederum kommutiert. Also ist wegen der Separiertheit von f hier $h_1 = h_2$, was zu zeigen war.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei X ein Schema. Für $f \in \mathcal{O}_X(X)$ und $x \in X$ sei $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ das Bild von f im Halm bei x, und $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ sei das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. Wir setzen

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \notin m_x\}.$$

Zeige:

a) X_f ist eine offene Teilmenge von X.

b) X ist genau dann affin, wenn es endlich viele Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$ gibt, so dass gilt:
   - für alle $i = 1, \ldots, r$ ist X_{f_i} affin.
   - $(f_1, \ldots, f_r) = \mathcal{O}_X(X)$.

   Hinweis: Es sei $A = \mathcal{O}_X(X)$. Man darf ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{O}_{X_f}(X_f) \cong A_f$ gilt (und erhält 2 Extrapunkte, wenn man dies zeigt).

Lösung: Teil a) wurde in der Übung gezeigt.

b) Zunächst sollte der Hinweis richtig lauten: $\mathcal{O}_{X_{f_i}}(X_{f_i}) \cong A_{f_i}$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

Es sei $A = \mathcal{O}_X(X)$. Wir betrachten den Morphismus $\Phi : X \to \operatorname{Spec} A$ aus der natürlichen Bijektion

$$\operatorname{Mor}(X, \operatorname{Spec} A) \cong \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X))$$

der der Identität $A \to \mathcal{O}_X(X)$ entspricht. In der Übung wurde gezeigt, dass $\Phi^{-1}(D(f_i)) = X_{f_i}$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt und dass außerdem $\Phi_{|X_{f_i}}$ ein Isomorphismus ist, wenn der Ringhomomorphismus

$$\varphi_{f_i} = \Phi^{\#}_{D(f_i)} : \mathcal{O}_A(D(f_i)) = A_{f_i} \longrightarrow \Phi_* \mathcal{O}_X(D(f_i)) = \mathcal{O}_X(X_{f_i})$$

für alle $i = 1, \ldots, r$ ein Isomorphismus ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen φ_{f_i} für alle $i = 1, \ldots, r$ ein Isomorphismus ist. Zunächst ist X_{f_i} affin, also isomorph zu $\operatorname{Spec} A_i$ für $A_i = \mathcal{O}_X(X_{f_i})$. Außerdem ist φ_{f_i} genau der Morphismus aus der UAE der Lokalisierung $A \to A_{f_i}$: Denn f_i ist invertierbar in $\mathcal{O}_X(X_{f_i}) = A_i$; also gibt es genau einen Pfeil $A_f \to A_i$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A = \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho^X_{X_{f_i}}"] & \\
A_f \arrow[r, "\varphi_{f_i}"'] & A_i = \mathcal{O}_X(X_{f_i})
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

<u>φ_{f_i} ist injektiv:</u> Denn sei $a \in A_{f_i}$, $a = \frac{b}{f_i^n}$ für ein $b \in A$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_{f_i}(a) = 0$ in A_i. Zu zeigen ist, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_i^m b = 0$ in A gilt.

Zur besseren Lesbarkeit benutzen wir im Folgenden die Konvention, dass Einschränkungen von Elementen durch den Zusatz "auf $U \subset X$" angegeben werden (für $U \subset X$ offen). So ist zum Beispiel $\varphi_{f_i}(a) = \frac{b}{f_i^n}$ und letztere Quotient ist als Quotient der Einschränkungen der Elemente von $\mathcal{O}_X(X)$ nach $\mathcal{O}_X(X_{f_i})$ zu verstehen.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $j = 1, \ldots, r$

$$f_i^m b = 0 \quad \text{auf } X_{f_j}$$

gilt. Daraus folgt $f_i^m b = 0$ in X, denn die X_{f_j} bilden eine offene Überdeckung von X.

Dazu schränken wir zunächst $0 = \varphi_{f_i}(a) = \frac{b}{f_i^n}$ weiter ein auf $X_{f_i} \cap X_{f_j}$. Die offene Teilmenge $X_{f_i} \cap X_{f_j} \subset X_{f_j}$ ist isomorph zu $D(f_i) \subset \operatorname{Spec} A_j$. Also heißt $\frac{b}{f_i^n} = 0$ auf $X_{f_i} \cap X_{f_j}$, dass es ein $m_j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_i^{m_j} b = 0$ auf X_{f_j} gilt. Durch Durchmultiplizieren mit geeigneten Potenzen von f_i können wir erreichen, dass $f_i^m b = 0$ auf X_{f_j} für alle $j = 1, \ldots, r$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Hier braucht man, dass es nur endlich viele f_j's gibt. Damit ist der Exponent unabhängig von j und wir haben unser Ziel erreicht. φ_{f_i} ist also injektiv.

<u>φ_{f_i} ist surjektiv:</u> Sei dazu $a \in A_i$. Wir müssen zeigen, dass $a = \frac{b}{f_i^n}$ auf X_{f_i} gilt, wobei $b \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ sind.

Sei nun $j \in \{1, \ldots, r\}$, $j \neq i$. Zunächst können wir a weiter auf $X_{f_i} \cap X_{f_j}$ einschränken. Da $X_{f_i} \cap X_{f_j} \cong D(f_i) \subset \operatorname{Spec} A_j$ gilt, also insbesondere $\mathcal{O}_X(X_{f_i} \cap X_{f_j}) \cong \mathcal{O}_X(X_{f_j})_{f_i}$, finden wir $b_j \in A_j$ und $m_j \in \mathbb{N}$, so dass

$$a = \frac{b_j}{f_i^{m_j}} \quad \text{auf } X_{f_i} \cap X_{f_j}$$

ist. Wir können die b_j durch Durchmultiplizieren mit Potenzen von f_i so abändern, dass gilt

$$a = \frac{b_j}{f_i^m} \qquad \text{auf } X_{f_i} \cap X_{f_j} \tag{1}$$

für ein festes $m \in \mathbb{N}$ und alle $j = 1, \ldots, r$, $j \neq i$.

Nun seien $j, k \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$. Auf $X_{f_i} \cap X_{f_j} \cap X_{f_k}$ gilt $\frac{b_j}{f_i^m} = \frac{b_k}{f_i^m}$, also ist

$$f_i^{m_{jk}}(b_j - b_k) = 0$$

auf $X_{f_j} \cap X_{f_k}$ für gewisse $m_{jk} \in \mathbb{N}$. Hierbei fassen wir $X_{f_i} \cap X_{f_j} \cap X_{f_k}$ als $D(f_i) \subset \operatorname{Spec}(A_{j f_k})$ auf. Wir können die Exponenten von f_i wieder gleichmachen und erhalten also

$$f_i^M b_j = f_i^M b_k \tag{2}$$

auf $X_{f_j} \cap X_{f_k}$ für ein festes $M \in \mathbb{N}$ und alle $j, k \in \{1, \dots, r\}$, $j, k \neq i$.

Wir haben nun die folgende Familie s_j mit $s_j \in \mathcal{O}_X(X_j)$ konstruiert: Auf X_{f_i} sei $s_i = f_i^{m+M} a$. Auf X_{f_j} für $j \neq i$ sei $s_j = f_i^M b_j$. Dann gilt wegen (1) auf $X_{f_i} \cap X_{f_j}$

$$s_i = f_i^{m+M} a = f_i^M b_j = s_j.$$

Und für $j, k \neq i$ gilt wegen (2) auf $X_{f_j} \cap X_{f_k}$

$$s_j = f_i^M b_j = f_i^M b_k = s_k.$$

Damit ist $(s_j)_{j=1}^r$ eine konsistene Familie für die Überdeckung $X = \bigcup_{j=1}^r X_{f_j}$ und wir finden ein Amalgam $b \in A$. Die Einschränkung von b auf X_{f_i} ist $s_i = f_i^{m+M} a$. Also ist

$$a = \frac{b}{f_i^{m+M}}$$

wie gewünscht.