Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

14.06.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Lösungen zum Traumhaften Übungsblatt

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Es sei X ein Schema. Zeige, dass jede abgeschlossene, irreduzible Teilmenge $Y \subset X$ einen eindeutigen generischen Punkt $y \in X$ besitzt, d.h. $Y = \overline{\{y\}}$.

An Y fehlt natürlich die Voraussetzung, dass $Y \neq \emptyset$ gilt.

Lösung: Es sei $U \subset X$ eine affine, offene Teilmenge und $U \cap Y \neq \emptyset$. Wir schreiben $U \cong \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A. Dann ist $U \cap Y$ eine abgeschlossene Teilmenge von U, entspricht also einer abgeschlossenen Teilmenge $V(I)$ von $\operatorname{Spec} A$ für ein Ideal $I \subset A$. $U \cap Y$ ist irreduzibel, denn es ist eine in Y offene, nichtleere Teilmenge von Y, also dicht in Y. Deshalb ist ihr Abschluss gleich Y, und folglich $U \cap Y$ irreduzibel nach Aufgabe 3, Blatt 2 von letztem Semester. Also ist I ein Primideal und es gilt $V(I) = \overline{\{I\}}$ (wie man schon in der Lösung von Aufgabe 1 vom Langen Übungsblatt sehen konnte).

Es sei $\Phi : \operatorname{Spec} A \to U \subset X$ der Isomorphismus von oben. Wir behaupten, dass $y = \Phi(I)$ der generische Punkt von Y ist. Denn sei A abgeschlossen und $y \in A$. Dann ist $A \cap U$ abgeschlossen in U, enthält also den Abschluss von y in U, was, wie wir eben gezeigt haben, $U \cap Y$ ist. Also enthält A die Menge $U \cap Y$, und auch den Abschluss davon, der Y ist. Damit gilt: Jede abgeschlossene Menge, die y enthält, enthält auch Y, und es folgt $Y = \overline{\{y\}}$.

Es fehlt noch die Eindeutigkeit. Angenommen, wir hätten zwei generische Punkte y_1, y_2 für Y. Wenn y_1 in einer affinen, offenen Menge $U \subset X$ liegt, y_2 aber nicht, dann erhalten wir aus $y_1 \in U \cap Y = U \cap \overline{\{y_2\}} = \emptyset$ einen Widerspruch. Also enthält jede offene affine Menge $U \subset X$ beide Punkte y_1, y_2. Sei $U \cong \operatorname{Spec} A$ und seien I_1, I_2 die Primideale, die y_1 und y_2 entsprechen. Dann gilt

$$\overline{\{I_1\}} = V(I_1) = V(I_2) = \overline{\{I_2\}},$$

also $I_1 = \sqrt{I_1} = \sqrt{I_2} = I_2$, und somit $y_1 = y_2$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit affinen Mengen $V_i \cong \operatorname{Spec} R_i$, so dass gilt

(∗) Für jedes $i \in I$ gibt es eine offene Überdeckung $f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j \in J_i} U_{ij}$ mit affinen Mengen $U_{ij} \cong \operatorname{Spec} A_{ij}$, so dass für jedes $j \in J_i$ der Ring A_{ij} als R_i-Algebra endlich erzeugt ist.

(ii) Für jede offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i\in I} V_i$ mit $V_i \cong \operatorname{Spec} R_i$ gilt $(*)$.

Lösung: Es reicht, wenn wir zeigen, dass für jede offene, affine Teilmenge $W \cong \operatorname{Spec} R$ gilt

(EE) Es gibt eine Überdeckung $f^{-1}(W) = \bigcup_{j\in J} U_j$ durch offene, affine $U_j \cong \operatorname{Spec} A_j$, die endlich erzeugte R-Algebren sind.

Zunächst zeigen wir, dass (EE) in gewissem Sinn stabil unter Lokalisierung ist.

Behauptung: Wenn $W \subset Y$ offen und isomorph zu $\operatorname{Spec} R$ ist und (EE) für W gilt, dann gilt (EE) auch für alle $D(g) \subset W$ mit $g \in R$.

Denn sei $\{U_j\}_{j\in J}$ die offene, affine Überdeckung aus (EE) von $f^{-1}(W)$. Wir erhalten Morphismen $f_{|U_j} : U_j \to W$, die Ringhomomorphismen $\varphi_j : R \to A$ entsprechen. Es gilt

$$f^{-1}(D(g)) \cap U_j = (f_{|U_j})^{-1}(D(g)) = D(\varphi_j(g)).$$

Wir schränken f auf $D(\varphi_j(g))$ ein und erhalten einen Morphismus $D(\varphi_j(g)) \to D(g)$, der dem Ringhomomorphismus

$$(\varphi_j)_g : R[\tfrac{1}{g}] \to A_j[\tfrac{1}{\varphi_j(g)}]$$

entspricht. Wenn wir zeigen können, dass für alle j der Ringhomomorphismus $(\varphi_j)_g$ aus $A_j[\frac{1}{\varphi_j(g)}]$ eine endlich erzeugte $R[\frac{1}{g}]$-Algebra macht, sind wir fertig.

Seien $a_1, \dots, a_d$ die Erzeuger von A_j als R-Algebra und sei $\tilde{a}$ ein Element aus $A_j[\frac{1}{\varphi_j(g)}]$. Dann ist $\tilde{a} = \frac{a}{\varphi_j(g)^m}$ für ein $a \in A_j$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Für a gibt es ein Polynom $f = \sum_\alpha r_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \in R[X_1, \dots, X_d]$ mit

$$a = \sum_\alpha \varphi_j(r_\alpha) a_1^{\alpha_1} \cdots a_d^{\alpha_d}.$$

Damit ist

$$\tilde{a} = \sum_\alpha \varphi_j\left(\tfrac{r_\alpha}{g^m}\right) a_1^{\alpha_1} \cdots a_d^{\alpha_d}.$$

Also wird $A_j[\frac{1}{\varphi_j(g)}]$ als $R[\frac{1}{g}]$-Algebra erzeugt von den (Bildern unter Lokalisierung der) $a_1, \dots, a_d$.

Für den allgemeinen Fall überdecken wir $W \subset Y$ durch $D(g_i)$, wobei jedes g_i in einem $R_{\alpha(i)}$ liegt, also $D(g_i) \subset W \cap V_i$ gilt. Da $D(g_i) \subset V_i$ und V_i die Eigenschaft (EE) erfüllt, erfüllt wegen obiger Behauptung auch jedes $D(g_i)$ die Eigenschaft (EE). Nun überdecken wir jedes $D(g_i)$ durch $D(h_{ik})$, wobei $h_{ik} \in R$ (mit $\operatorname{Spec} R = W$) sei. Da $\mathcal{O}_Y$ eine Garbe ist und $D(h_{ik}) \subset D(g_i) \subset \operatorname{Spec} R$, kommutiert

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "\psi_i"'] \arrow[dr] & \\
R_{\alpha(i)}[\frac{1}{g_i}] \arrow[r] & R[\frac{1}{h_{ik}}]
\end{tikzcd}$$

Wir behaupten, dass $R_{\alpha(i)}[\frac{1}{g}][\psi_i(h_{ik})^{-1}] \cong R[h_{ik}^{-1}]$ ist. Die Surjektivität folgt aus der Kommutativität des Diagramms. Zur Injektivität: Sei $\frac{y}{h_{ik}^m} = 0$ in $R[h_{ik}^{-1}]$. Dann gibt es ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ mit $h_{ik}^{\tilde{m}} y = 0$ in R. Bildet man y nach $R_{\alpha(i)}[g^{-1}]$ ab, so gilt dort

$$\psi_i(h_{ik})^{\tilde{m}} \psi_i(y) = 0,$$

woraus folgt, dass das Urbild $\frac{x}{\psi_i(h_{ik})^m}$ von $\frac{y}{h_{ik}^m}$ in $R_{\alpha(i)}[\frac{1}{g}][\psi_i(h_{ik})^{-1}]$ gleich 0 ist.

Damit wissen wir, dass $D(h_{ik})$ gleich der affinen offenen Menge $D(\psi_i(h_i k))$ in $D(g_i)$ ist und somit wegen der Behauptung die Eigenschaft (EE) hat.

Also können wir das Urbild $f^{-1}(D(h_{ik}))$ durch affine, offene Mengen $U_{ik,j}$ überdecken, so dass $U_{ik,j} \cong \operatorname{Spec} A_{ik,j}$ ist und $A_{ik,j}$ endlich erzeugte $R[h_{ik}^{-1}]$-Algebren sind. Da $R[h_{ik}^{-1}]$ selbst eine endlich erzeugte R-Algebra ist, gilt dasselbige auch für die $A_{ik,j}$, was zu zeigen war.