Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

21.06.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Lösungen zum Knappen Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\mathbb{P}^n(\mathbb{Z}) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$ der n-dimensionale projektive Raum über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Zeige, dass der Morphismus $\mathbb{P}^n(\mathbb{Z}) \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ eigentlich ist.

Lösung: $\mathbb{P}^n(\mathbb{Z})$ ist noethersch und von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, denn es wird von den $D_+(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) überdeckt, die endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebren sind. Deshalb kann man das Bewertungskriterium anwenden. In der Übung wurde zu einem Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

schon ein Morphismus $h : \operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n(\mathbb{Z})$ konstruiert. Es fehlt noch ein Argument, wieso h eindeutig ist. Wir haben bei Aufgabe 1 vom Trennblatt bzw. deren Lösung gesehen, dass wir die Separiertheit lokal testen können.

Es sei X ein Schema über Y. Wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ eine offene Überdeckung ist, dann ist X genau dann separiert über Y, wenn die Morphismen

$$h_{ij}^{-1} \circ \Delta_{|U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \to U_i \times_Y U_j$$

abgeschlossene Immersionen sind. Hierbei ist $\Delta : X \to X \times_Y X$ die Diagonale und $h_{ij} : U_i \times_Y U_j \to p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j) \subset X \times_Y X$ die offene Immersion (man überlege sich, wie diese konstruiert wird!).

In unserer Situation betrachten wir die offene Überdeckung $\mathbb{P}^n(\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=0}^n D_+(x_i)$. Dann ist

$$D_+(x_i) \cap D_+(x_j) = D_+(x_i x_j)$$

affin mit zugehörigem Ring

$$\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(x_i x_j)} \cong \mathbb{Z}[\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}, \tfrac{x_0}{x_j}, \dots, \tfrac{x_n}{x_j}].$$

Weiter ist

$$D_+(x_i) \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} D_+(x_j) \cong \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{x_0}{x_j}, \dots, \tfrac{x_n}{x_j}]$$

ebenfalls affin und der Morphismus $h_{ij}^{-1} \circ \Delta_{|D_+(x_i)\cap D_+(x_j)}$ wird induziert von den Inklusionen $D_+(x_i) \cap D_+(x_j) \to D_+(x_i)$ und $D_+(x_i) \cap D_+(x_j) \to D_+(x_j)$. Damit entspricht $h_{ij}^{-1} \circ \Delta_{|D_+(x_i)\cap D_+(x_j)}$ dem Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{x_0}{x_j}, \dots, \tfrac{x_n}{x_j}] \to \mathbb{Z}[\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}, \tfrac{x_0}{x_j}, \dots, \tfrac{x_n}{x_j}]\,, \quad f \otimes g \to fg$$

Dieser ist surjektiv und damit eine abgeschlossene Immersion.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus *von noetherschen Schemata*.

Zeige, dass f eigentlich ist.

Hinweis: Für die (universelle) Abgeschlossenheit hilft der „Going-up"-Satz.

Lösung: Dass die beteiligten Schemata noethersch sind, braucht man nicht wirklich; es hilft nur beim Beweis der Separiertheit.

In der Übung wurde gezeigt, dass ein endlicher Morphismus zwischen affinen Schemata abgeschlossen, separiert und von endlichem Typ ist (wobei die Abgeschlossenheit der Kernpunkt war). Zur Vervollständigung fehlen also noch folgende Aussagen.

Behauptung 1: Endlich zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

Behauptung 2: Separiertheit ist lokal auf der Basis.

Behauptung 3: Abgeschlossenheit ist lokal auf der Basis.

Dabei heißt „lokal auf der Basis" das Folgende: Wenn immer es eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i\in I} V_i$ gibt, so dass $f : f^{-1}(V_i) \to V_i$ die Eigenschaft blubb hat, dann hat auch $f : X \to Y$ die Eigenschaft blubb.

Wir argumentieren nun zunächst, wieso aus den obigen Behauptungen die Lösung der Aufgabe folgt. Zunächst gibt es eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_{i\in I} V_i$ mit $V_i \cong \operatorname{Spec} R_i$, so dass $U_i := f^{-1}(V_i) \cong \operatorname{Spec} A_i$ und A_i endlich erzeugt als R_i-Modul ist. Da Morphismen zwischen affinen Schemata separiert sind, sind also alle $f : U_i \to V_i$ separiert und mit Behauptung 2 folgt, dass auch f separiert ist. Weiter ist f von endlichem Typ, weil die A_i insbesondere endlich erzeugte R_i-Algebren sind. Schließlich ist f abgeschlossen, denn Behauptung 3 sagt, dass wir dies nur für die $f : U_i \to V_i$ überprüfen müssen. Für diese wurde die Abgeschlossenheit aber in der Übung gezeigt. f ist auch universell abgeschlossen, denn jeder Basiswechsel von f ist wieder ein endlicher Morphismus wegen Behauptung 1, also abgeschlossen. Damit ist die Aufgabe erledigt.

Zur Behauptung 1: Es sei $g : Y' \to Y$ ein Basiswechsel und

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

das zugehörige Diagramm. Wir wählen ein affines, offenes $V \subset Y$, $V \cong \operatorname{Spec} R$, für das $f^{-1}(V) \cong \operatorname{Spec} A$ gilt und so dass A als R-Modul endlich erzeugt ist. Es sei $U \subset g^{-1}(V)$

eine affine offene Teilmenge, isomorph zu Spec B. Dann ist $f'^{-1}(U)$ das Faserprodukt von U mit $f^{-1}(V)$ über V.

$$\begin{tikzcd}
f'^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & f^{-1}(V) \arrow[d, "f"] \\
U \arrow[r, "g|_U"] & V
\end{tikzcd}$$

Damit ist $f'^{-1}(U)$ affin, isomorph zu Spec $B \otimes_R A$. Das ist ein endlich erzeugter B-Modul, er wird von den Bildern der Erzeuger von A als R-Modul erzeugt. Da Y' durch Mengen der Form U überdeckt wird, ist f' endlich.

Zur Behauptung 2: Es sei $Y = \bigcup_{i\in I} V_i$ mit offenen V_i, so dass $f : f^{-1}(V_i) \to V_i$ für alle $i \in I$ separiert ist. Zu zeigen ist, dass $f : X \to Y$ separiert ist. Hier kann man unter der Voraussetzung, dass alle beteiligten Schemata noethersch sind, mit dem Bewertungskriterium (für allgemeine Bewertungsringe) arbeiten. Es geht aber auch direkt.

f ist genau dann separiert, wenn $\Delta_X(X) \subset X \times_Y X$ abgeschlossen ist. Abgeschlossenheit ist aber lokal auf der Basis. Wir suchen also eine offene Überdeckung $X \times_Y X = \bigcup_{j\in J} W_j$, so dass $\Delta_X : \Delta_X^{-1}(W_j) \to W_j$ abgeschlossen ist.

Sei dazu $U_i = f^{-1}(V_i)$. Dann ist $h_i : U_i \times_Y U_i \to X \times_Y X$ eine offene Immersion auf $W_i := p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_i)$. Dazu zeigt man, dass letztere Menge die UAE von $U_i \times_Y U_i$ erfüllt. Die W_i überdecken ganz $X \times_Y X$.

Es ist $\Delta_X^{-1}(W_i) = U_i$. Nun verknüpfen wir Δ_X mit h_i^{-1} und erhalten einen Morphismus $U_i \to U_i \times_Y U_i$. Desweiteren ist $U_i \times_Y U_i \cong U_i \times_{V_i} U_i$ (wieder über die UAE). Über ein paar kommutative Diagramme können wir den erhaltenen Morphismus $U_i \to U_i \times_{V_i} U_i$ als Diagonale

$$\Delta_{U_i} : U_i \to U_i \times_{V_i} U_i$$

identifizieren. Diese ist nach Voraussetzung abgeschlossen, also ist auch $\Delta_X : \Delta_X^{-1}(W_j) \to W_j$ abgeschlossen.

Zur Behauptung 3: Es sei $Y = \bigcup_{i\in I} V_i$ und $U_i = f^{-1}(V_i)$. Wir zeigen, dass $f : X \to Y$ abgeschlossen ist, wenn $f : U_i \to V_i$ für jedes i abgeschlossen ist.

Sei dazu $Z \subset X$ abgeschlossen. Dann ist für jedes i die Menge $U_i \cap Z$ abgeschlossen in U_i. Nach Voraussetzung ist $f(U_i \cap Z)$ abgeschlossen in V_i.

Weiter gilt:

$$Y \setminus f(Z) = \bigcup_{i\in I} V_i \cap (Y \setminus f(Z)) = \bigcup_{i\in I} V_i \setminus f(Z) = \bigcup_{i\in I} V_i \setminus f(U_i \cap Z).$$

Beim letzten Gleichheitszeichen brauchen wir, dass $U_i = f^{-1}(V_i)$ gilt. Also ist $Y \setminus f(Z)$ aufgrund der Gleichungskette und der Tatsache, dass $V_i \setminus f(U_i \cap Z)$ offen ist, wieder offen. Damit ist $f(Z)$ abgeschlossen und insgesamt f ein abgeschlosser Morphismus.