Aufgabe 13.4 - ein Versuch

Es sei X ein Schema und $X = \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{Spec}(R_j)$ eine offene Überdeckung. Weiter sei für $1 \leq j \leq k$ ein injektiver R_j-Modul I_j gegeben und $\varphi_j : \operatorname{Spec}(R_j) \longrightarrow X$ die Inklusion.

Behauptung: Die Garbe $\oplus_j (\varphi_j)_*(\widetilde{I_j})$ ist ein injektives Objekt in der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

Denn: Wir brauchen gar nicht, dass die Spec(R_j) ganz X überdecken. Vielmehr zeigen wir folgendes:

Ist $\varphi : \operatorname{Spec}(R) \longrightarrow X$ die Inklusionen eines offenen affinen Unterschemas in X und I ein injektiver R-Modul, so ist $\varphi_*(\widetilde{I})$ ein injektives Objekt in der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

Die ursprüngliche Aussage folgt dann durch Bilden der direkten Summe.

Es sei also (damit der Beweis endlich in die Gänge kommt) ein kommutatives Diagramm von $\mathcal{O}_X$-Moduln gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & \alpha \downarrow & & \\ & & \varphi_*(\widetilde{I}) & & \end{array}$$

Dabei seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ quasikohärent. Gesucht ist eine Fortsetzung von α nach $\mathcal{N}$. Um die Voraussetzung anzuwenden schränken wir erst einmal alles auf U ein. Da $\mathcal{M}$ quasikohärent ist, ist $\mathcal{M}|_U = \widetilde{\mathcal{M}(U)}$. Analoges gilt für $\mathcal{N}$. Außerdem ist (mit demselben Grund) $(\varphi_*(\widetilde{I}))|_U = \widetilde{I}$.

Wir erhalten also auf U das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}(U)} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{N}(U)} \\ & & \alpha|_U \downarrow & & \\ & & \widetilde{I} & & \end{array}$$

Dieses Diagramm ist nach §5, Bemerkung 4, durch das entsprechende R-Modul-Diagramm der globalen Schnitte eindeutig bestimmt:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{N}(U) \\ & & \alpha(U) \downarrow & & \\ & & I & & \end{array}$$

Nun ist aber I ein injektiver R-Modul, und deshalb lässt sich $\alpha(U)$ nach $\mathcal{N}(U)$ fortsetzen. Es gibt also einen R-Modulhomomorphismus $b : \mathcal{N}(U) \longrightarrow I$, sodass

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{N}(U) \\ & & \alpha(U) \downarrow & \swarrow b & \\ & & I & & \end{array}$$

kommutativ ist.

Zu b gehört (wieder nach §5.4) ein $\mathcal{O}_U$-Garbenmorphismus $\tilde{b} : \widetilde{\mathcal{N}(U)} \longrightarrow \tilde{I}$, der das Diagramm noch weiter oben kommutativ ergänzt.

Nun müssen wir noch $\tilde{b}$ nach $\mathcal{N}$ fortsetzen, und das geht so: Für offenes $V \subseteq X$ setzen wir $\beta(V) : \mathcal{N}(V) \longrightarrow \varphi_*(\widetilde{I})(V)$ durch das folgende Diagramm fest, das ja kommutativ sein muss:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(V) & \stackrel{\beta(V)}{\longrightarrow} & \varphi_*(\widetilde{I})(V) \\ \rho^V_{U\cap V} \downarrow & & \| \\ \mathcal{N}(U\cap V) & \stackrel{\tilde{b}(U\cap V)}{\longrightarrow} & I(U\cap V) \\ \| & & \\ \widetilde{\mathcal{N}(U)}(U\cap V) & & \end{array}$$

Die Identität rechts steht da nach Definition von $\varphi_*(\widetilde{I})$, und die dadurch gegebene Vorschrift für β ist tatsächlich ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus.

Man sieht, dass β eine Fortsetzung von $\tilde{b}$ ist, den für $V \subseteq U$ ist die Restriktion links auch die Identität.

Insgesamt ist damit gezeigt, was jemand (wer war das eigentlich... grummel) gezeigt haben wollte.

Bemerkung (ich kanns einfach nicht sein lassen...)

In der Lösung haben wir Garbenmorphismen $\mathcal{M} \longrightarrow \varphi_*(\widetilde{I})$ von X nach U eingeschränkt und umgekehrt Garbenmorphismen $\mathcal{M}|_U \longrightarrow \widetilde{I}$ von U nach X fortgesetzt. Dies liefert zueinander inverse Bijektionen zwischen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \varphi_*(\widetilde{I})) \;\text{ und }\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}|_U, (\widetilde{I})).$$

Was hier so schön explizit geht, ist ein Spezialfall der allgemeineren Situation, dass ein Morphismus $\psi : Y \longrightarrow X$ von Schemata gegeben ist, und wir den zugehörigen Funktor ψ_* (bzw. ψ^*) ansehen, der aus einer $\mathcal{O}_Y$ Modulgarbe eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe macht (bzw. umgekehrt). Dann gilt für Modulgarben $\mathcal{M}$ auf X und $\mathcal{F}$ auf Y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \psi^*(\mathcal{F})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\psi_*(\mathcal{M}), \mathcal{F}).$$

Insbesondere sind die Funktoren ψ^* und ψ_* zueinander adjungiert.