Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

26. 4. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeige:

a) Für jedes Schema S und jedes S-Schema X gilt:

$$X \times_S S \cong X$$

b) Basiswechsel ist transitiv, das heißt: Sind S ein Schema und T ein S-Schema, so gilt für alle S-Schemata X und alle T-Schemata Y:

$$(X \times_S T) \times_T Y \cong X \times_S Y$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien S ein Schema und T ein S-Schema. Ergänze die Zuordnung $X \mapsto X \times_S T$ zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der T-Schemata.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien L/K eine einfache, algebraische Körpererweiterung und $X := \operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} L$.

a) Wie viele Punkte besitzt X?

b) Zeige: Ist L/K sogar galoissch, dann operiert $\operatorname{Gal}(L/K)$ transitiv auf X.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei X ein Schema von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}$. Zeige: Dann existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und ein Schema $\mathcal{X}$ über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$, sodass

$$X \cong \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$$

gilt.

Hinweis: Benutze (ohne Beweis), dass jede offene Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums quasikompakt ist.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 3. 5. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.