UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT II
STEFAN KÜHNLEIN
UTE WOLF

3. 5. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006
2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Eine Eigenschaft E von Schemamorphismen heißt *stabil unter Basiswechsel*, wenn für jeden Morphismus $\xi : X \to S$ mit Eigenschaft E und für jeden Morphismus $\tau : T \to S$ auch der induzierte Morphismus $p_2 : X \times_S T \to T$ die Eigenschaft E hat.

Zeige: Die Eigenschaft "von endlichem Typ" ist stabil unter Basiswechsel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f : X \to Y$ heißt *endlich*, wenn es eine offene, affine Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ gibt, sodass für jedes $i \in I$ auch $U_i := f^{-1}(V_i)$ affin und $\mathcal{O}_X(U_i)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(V_i)$-Modul ist.

Zeige: Ein Schemamorphismus $f : X \to Y$ ist genau dann endlich, wenn für jede offene, affine Teilmenge $V \subseteq Y$ auch $U := f^{-1}(V)$ affin und $\mathcal{O}_X(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(V)$-Modul ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei S/R eine ganze Ringerweiterung. Die Einbettung $i : R \hookrightarrow S$ induziert eine stetige Abbildung $\varphi : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ durch $\varphi(P) = i^{-1}(P) = P \cap R$. φ ist surjektiv (laut Vorlesung). Zeige:

a) φ ist abgeschlossen.

b) Sind $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} S$ mit $P_1 \subseteq P_2$ und $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$, so gilt $P_1 = P_2$.

c) $\varphi(m\text{-}\operatorname{Spec}(S)) = m\text{-}\operatorname{Spec}(R)$
$m\text{-}\operatorname{Spec}(S) = \varphi^{-1}(m\text{-}\operatorname{Spec}(R))$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien R ein Ring und $G \subseteq \operatorname{Aut}(R)$ eine Untergruppe.

a) Konstruiere den G-Quotienten von R in der Kategorie der Ringe.

b) Beschreibe das Spektrum des G-Quotienten von $\mathbb{Z}[T]$ als Teilmenge von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$ für die Gruppen $G = \langle T \mapsto -T + a \rangle$, $a \in \mathbb{Z}$.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 10. 5. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.