Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

10. 5. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeige: Für jede algebraische Körpererweiterung L/K gilt:

$$L \otimes_K K^{\mathrm{alg}} \text{ ist reduziert } \Leftrightarrow L/K \text{ ist separabel}$$

(Dabei sei K^{alg} ein algebraischer Abschluss von K.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $\xi : X \to S$ ein Schema über S und $Y \hookrightarrow S$ ein abgeschlossenes Unterschema von S. Zeige:

a) $X \times_S Y = \xi^{-1}(Y)$

b) Ist $X \to S$ auch ein abgeschlossenes Unterschema von S, so gilt $X \times_S Y = X \cap Y$.

(Beachte: Die Gleichheit gilt jeweils in der Kategorie der topologischen Räume.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen und $j : U \hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion. Weiter seien $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U und $j_!(\mathcal{F})$ die zur Prägarbe

$$W \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(W) & , W \subseteq U \\ \{0\} & , \text{sonst} \end{cases} \qquad (W \subseteq X \text{ offen})$$

assoziierte Garbe. Sie heißt *Erweiterung von $\mathcal{F}$ um 0 außerhalb U*. Zeige:

a) $(j_!\,\mathcal{F})|_U = \mathcal{F}$

b) $\forall\, P \in X :\ (j_!\,\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & , P \in U \\ \{0\} & , \text{sonst} \end{cases}$

c) Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X mit $\mathcal{G}\,|_U = (j_!\,\mathcal{F})|_U$ und $\mathcal{G}_P = (j_!\,\mathcal{F})_P \ \forall\, P \in X$, so gilt $\mathcal{G} \cong j_!\,\mathcal{F}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y, so sei $f^{-1}\mathcal{G}$ die zur Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ offen} \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V) \qquad (U \subseteq X \text{ offen})$$

assoziierte Garbe auf X. Sie heißt *inverse Bildgarbe* von $\mathcal{G}$. Sind speziell $Z \subseteq X$, $i : Z \hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so schreiben wir $\mathcal{F}|_Z := i^{-1}\mathcal{F}$ und nennen diese Garbe die *Einschränkung* von $\mathcal{F}$ auf Z. Zeige:

a) $\forall\, P \in Z : \; (\mathcal{F}|_Z)_P = \mathcal{F}_P$

b) $\forall\, U \subseteq Z$ offen:

$$\mathcal{F}|_Z(U) = \{s \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall\, x \in U \;\exists \text{ Umgebung } V_x \subseteq X \text{ von } x \text{ in } X \;\exists\, t \in \mathcal{F}(V_x)$$
$$\text{mit } \forall\, y \in V_x \cap U : \; t_y = s_y \text{ in } \mathcal{F}_y\}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Seien nun X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $Z := X \setminus U$ abgeschlossen mit den natürlichen Inklusionen $j : U \hookrightarrow X$ und $i : Z \hookrightarrow X$. Zeige: Für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf X haben wir die folgende exakte Sequenz:

$$0 \to j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z) \to 0$$

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 17. 5. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.