Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

17. 5. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechne für eine welke Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X die erste Čech-Kohomologie.

Zur Erinnerung:
Eine Garbe $\mathcal{F}$ heißt *welk*, wenn alle Restriktionsmorphismen surjektiv sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein R-Modul M heißt *divisibel*, wenn es zu jedem $x \in M$ und jedem $r \in R \setminus \{0\}$ ein $y \in M$ gibt mit $ry = x$. (Beachte: y ist i.a. nicht eindeutig bestimmt.) Zeige für jeden Hauptidealring R und jeden R-Modul M:

$$M \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow M \text{ ist divisibel.}$$

Hinweis für "$\Leftarrow$": Sind $A \subseteq B$ R-Moduln und $\alpha : A \to M$ ein R-Modul-Homomorphismus, so betrachte das System aller Fortsetzungen $\alpha' : A' \to M$ mit $A \subseteq A' \subseteq B$ und $\alpha'|_A = \alpha$ und wende das Zornsche Lemma an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei R wieder ein Hauptidealring. Zeige:
Jeder R-Modul M lässt sich in einen injektiven R-Modul M' einbetten.

Anleitung:
Schreibe $M = F/U$ als Quotient eines freien R-Moduls F. Zeige, dass $F \otimes_R \mathrm{Quot}(R)$ divisibel ist und dass jeder Faktormodul eines divisiblen Moduls wieder divisibel ist.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 24. 5. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.