

## Algebraische Geometrie 2

SS 2006  
 6. Übungsblatt

### Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $X = \mathbb{P}^1(k)$  die projektive Gerade über  $k$ , und  $K := k(T)$  ihr Funktionenkörper. Für eine Funktion  $f \in K^\times$  bezeichnen wir mit

$$(f) := \sum_{P \in X} \text{ord}_P(f) \cdot P$$

ihren Hauptdivisor. Weiter seien  $D$  ein beliebiger Divisor auf  $X$  und  $d$  der Grad von  $D$ .

- Berechne das Geschlecht von  $X$ .
- Zeige, dass es eine Funktion  $f \in K^\times$  gibt, sodass  $D + (f) = d \cdot \infty$ . Finde einen Garbenisomorphismus zwischen  $\mathcal{O}(D)$  und  $\mathcal{O}(d \cdot \infty)$ .
- Sehe ein, dass  $H^0(X, \mathcal{O}(D))$  und  $H^1(X, \mathcal{O}(D))$  endlichdimensionale  $k$ -Vektorräume sind, und dass

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{O}(D)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}(-2\infty - D)).$$

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Weiter seien  $M, N$  zwei  $R$ -Moduln und

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_{-1}} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \dots$$

sowie

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{e_{-1}} J_0 \xrightarrow{e_0} J_1 \xrightarrow{e_1} \dots$$

injektive Auflösungen von  $M$  bzw.  $N$ .

Zeige:

- Für jeden  $R$ -Modulhomomorphismus  $\Phi : M \longrightarrow N$  gibt es  $R$ -Modulhomomorphismen  $\Psi_a : I_a \longrightarrow J_a$  ( $a \in \mathbb{N}$ ), sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \Phi \downarrow & & \Psi_0 \downarrow & & \Psi_1 \downarrow & & \dots \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & J_0 & \longrightarrow & J_1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutativ ist.

- Wenn  $\widetilde{\Psi}_a : I_a \longrightarrow J_a$  eine weitere Menge von Morphismen mit der Eigenschaft aus a) ist, dann gibt es Morphismen  $\eta_a : I_a \longrightarrow J_{a-1}$ , sodass für alle  $a$

$$\widetilde{\Psi}_a - \Psi_a = e_{a-1} \circ \eta_a + \eta_{a+1} \circ d_a.$$

**Abgabe** bis spätestens Mittwoch, 7. 6. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.