Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

28. 6. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006

10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei R ein diskreter Bewertungsring. (Die einzigen Primideale von R sind also das Nullideal und das maximale Ideal.) Wie sieht eine beliebige Garbe, wie eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf $X = \operatorname{Spec} R$ aus? Welche Bedingungen sind nötig, damit eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe quasikohärent ist?

Finde jeweils ein Beispiel einer quasikohärenten und einer nicht quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf $\operatorname{Spec} R$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien R ein Ring und A eine R-Algebra. Zeige:

a) Für R-Derivationen $\delta_1, \delta_2 : A \to A$ ist $[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$ wieder eine R-Derivation.

b) Für R-Derivationen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ gilt stets $[[\delta_1, \delta_2], \delta_3] + [[\delta_2, \delta_3], \delta_1] + [[\delta_3, \delta_1], \delta_2] = 0$.

Bemerkung:
$(\mathrm{Der}_R(A, A), [\cdot, \cdot])$ ist eine *Lie-Algebra*; die Gleichung in b) heißt *Jacobi-Identität.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k seien die Varietät $V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ und darauf die Garbe der relativen Differentiale bzgl. k gegeben. Berechne den Halm dieser Garbe in jedem Punkt von V.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einem Schema X heißt *lokal frei vom Rang 1*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt mit $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$. $\mathcal{F}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ gibt mit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$.

Zeige: Jede lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe vom Rang 1 ist invertierbar.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 5. 7. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.