Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

5. 7. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006
11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei R ein noetherscher lokaler Ring, für den das maximale Ideal M ein Hauptideal ist. Zeige:

a) Jedes Ideal $I \subseteq R$ ist ein Hauptideal.

b) Für jedes Ideal $(0) \neq I \subseteq R$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I = M^n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für jeden noetherschen Ring R gilt $\dim R[X, X^{-1}] = 1 + \dim R$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Sei R ein Ring derart, dass für jedes maximale Ideal $M \subseteq R$ die Lokalisierung R_M noethersch ist. Außerdem gebe es für jedes $r \in R \setminus \{0\}$ nur endlich viele maximale Ideale, die r enthalten. Zeige, dass dann auch R noethersch ist.

Sei nun $R = k[X_1, X_2, \ldots]$ für einen Körper k. Definiere folgende Primideale in R:

$P_0 = (X_1)$
$P_1 = (X_2)$
$P_2 = (X_3, X_4)$
$P_3 = (X_5, \ldots, X_8)$
$\vdots$
$P_n = (X_{2^{n-1}+1}, \ldots, X_{2^n})$ $(n \geq 1)$

Setze $U := R \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} P_n$ und $S := U^{-1}R$.

b) Zeige: S ist noethersch.

c) Zeige: $\dim S = \infty$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal M. Zeige:
$\dim(R) = \min\{d \in \mathbb{N} : \text{Es gibt } x_1, \ldots, x_d \in M \text{ und ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } M^n \subseteq (x_1, \ldots, x_d)\}$

Bemerkung: Daraus folgt, dass jeder noethersche lokale Ring endlichdimensional ist.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 12. 7. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.