Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

12. 7. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006

12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien R ein Ring, A, B R-Algebren und $\varphi : A \to B$ ein R-Algebra-Homomorphismus. Zeige: Es gibt eine exakte Sequenz

$$\Omega_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien k ein Körper und K ein endlich erzeugter Funktionenkörper von k vom Transzendenzgrad 1. K/k sei separabel erzeugbar. C_K sei die zugehörige Kurve. Wir haben gesehen: C_K ist ein Schema, das eigentlich über $\operatorname{Spec} k$ ist.

a) Zeige: C_K ist eine nichtsinguläre Kurve.

b) Berechne die Garbe der relativen Differentiale auf C_K und in jedem Punkt den Halm.

c) Zeige: Obige Garbe ist lokal frei vom Rang 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $T^n(M) := M \otimes_R \ldots \otimes_R M$ das n-fache Tensorprodukt von M. I sei der Untermodul von $T^n(M)$, der von allen Elementen der Form $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ erzeugt wird, für die es $i \neq j$ gibt mit $x_i = x_j$. Der Faktormodul $\bigwedge^n M := T^n(M)/I$ heißt *n-te äußere Potenz* von M. Ein Element $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) + I$ schreiben wir kürzer als $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.

Zeige die UAE von $\bigwedge^n M$:

Zu jedem R-Modul N und jeder R-multilinearen, alternierenden Abbildung $\Phi : M^n \to N$ gibt es genau einen R-Modul-Homomorphismus $\varphi : \bigwedge^n M \to N$ mit $\varphi \circ \mathrm{pr} = \Phi$. (Dabei ist $\mathrm{pr} : M^n \to \bigwedge^n M$ die natürliche Abbildung.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
$\mathcal{F}$ sei eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe vom Rang r auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Finde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X, die den Namen $\bigwedge^n \mathcal{F}$ verdient. Welchen Rang hat diese Garbe?

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 19. 7. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.