Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Stefan Kühnlein
Ute Wolf

19. 7. 2006

Algebraische Geometrie 2

SS 2006

13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien X ein topologischer Raum und $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X. Zeige:

a) Ist $\mathcal{F}'$ welk, so ist für jedes offene $U \subseteq X$ die Sequenz $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$ ebenfalls exakt.

b) Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ welk, so ist auch $\mathcal{F}$ welk.

c) Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ welk, so ist auch $\mathcal{F}''$ welk.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine welke Garbe abelscher Gruppen auf X. Zeige: Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für jedes $i \geq 1$.

Hinweis: $H^i(X, \mathcal{F})$ ist die Kohomologie, die mit injektiven Auflösungen berechnet wird. Bette $\mathcal{F}$ in eine injektive Garbe $\mathcal{I}$ ein. Benutze Aufgabe 1 sowie Prop. 3.17 der Vorlesung, die besagt, dass jede injektive Garbe welk ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Zeige:

a) Für jede quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf Y ist $f^*(\mathcal{G})$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X.

b) Ist X noethersch, so ist für jede quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X auch $f_*(\mathcal{F})$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
In der Vorlesung (Folgerung 6) haben wir zu jedem noetherschen Schema X und jeder quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ eine welke, quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ konstruiert. Zeige: Dieses $\mathcal{G}$ ist injektiv.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 26. 7. 2006, um 13.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.