Ein Satz von Euler

Hier soll ein Beweis dieses Satzes präsentiert werden nebst einigen Informationen zur Gruppe der Bewegungen. Im Skript zu LA von Rehm/Trinks findet sich so ein Beweis, der aber allgemeiner geradentreue Abbildungen bei beliebigem Grundkörper studiert und daher deutlich länger ausfällt. Gerade Hörern, deren LA wenig Geometrie enthielt, empfehle ich, diesen Abschnitt genau durchzulesen. Darum habe ich mich bemüht, möglichst wenig aus LA II vorauszusetzen. Das meiste sollte mit Schulkenntnissen verständlich sein.
Statt in einem allgemeinen euklidischen n-dimensionalen Punktraum zu arbeiten, kann man durch Wahl eines orthonormalen Koordinatensystems und Identifizierung der Punkte mit ihren Koordinatenvektoren gleich annehmen, dass es sich um den euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^n$ handelt, und nur diesen braucht der Leser zu kennen. Dann benützt man das Standard-Skalarprodukt:
Für $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$[1] in $\mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt erklärt durch

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

(auch die Bezeichnung $\langle x, y \rangle$ ist üblich),
die Norm durch

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

und die Distanz (Abstand von x und y) durch

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

1. Definition: Eine *Bewegung* oder *Isometrie* ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die Abstände erhält, anders ausgedrückt, längentreu ist:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)).$$

Das hat seinen Ursprung und große Bedeutung in der Physik: Bewegt man einen starren Körper, z.B. einen Einheitswürfel oder Maßstab im Anschauungsraum, so bleiben die Abstände seiner Punkte (z.B. Ecken) ungeändert. Beispiele (in der Schule für $\mathbb{R}^2$) sind Translationen, Drehungen und Spiegelungen, letztere können aber durch Herumbewegen im Raum nicht realisiert werden. Translationen sind die Abbildungen τ_a, erklärt durch

$$\tau_a(x) = x + a.$$

Der Leser sollte die einfachsten Eigenschaften des Standardskalarprodukts kennen. Offensichtlich bilden die *Einheitsvektoren* $e_i,\ i = 1, \dots, n$, der *Standardbasis* für diese Metrik eine *Orthonormalbasis*, d.h. es ist $e_i \cdot e_j = 0$ für $i \neq j$ und $= 1$ für $i = j$.

[1] Bei Linksmultiplikation mit einer Matrix sind diese Vektoren als Spalten aufzufassen.

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$ die Menge der Bewegungen im $\mathrm{I\!R}^n$.

2. Lemma: Ist $\phi \in \mathcal{B}$, so hat $\psi := \tau_{-\phi(0)} \circ \phi$ den Fixpunkt 0.

Beweis: $\psi(0) = \phi(0) - \phi(0) = 0$. **q.e.d.**

Unser Ziel ist der Beweis, dass solche Abbildungen linear sind, was keineswegs offensichtlich ist.

3. Lemma: Sei $\psi \in \mathcal{B}$ mit Fixpunkt 0. Dann gilt $\forall x, y \in \mathrm{I\!R}^n : x \cdot y = \psi(x) \cdot \psi(x)$.

Beweis: Wir schreiben kurz $x' := \psi(x)$. Dann besagt $d(x, y) = d(\psi(x), \psi(y))$, ausgeschrieben mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts

$$x \cdot x + y \cdot y - 2(x \cdot y) = (x - y) \cdot (x - y) = (x' - y') \cdot (x' - y') = x' \cdot x' + y' \cdot y' - 2(x' \cdot y').$$

Für $y = 0$, also $y' = 0$, ergibt das $x \cdot x = x' \cdot x'$ für beliebige $x \in \mathrm{I\!R}^n$. Damit ist in unserer Formel oben auch $y \cdot y = y' \cdot y'$ und es folgt $x \cdot y = x' \cdot y'$. **q.e.d.**

Hieraus folgt übrigens, dass Bewegungen auch Winkel nicht ändern.

4. Lemma: $\psi \in \mathcal{B}$ habe die Fixpunkte $0, e_1, \dots, e_n$. Dann ist $\psi = \mathrm{id}$ (identische Abbildung.

Beweis: Für $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $\psi(x) = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ ist laut dem vorigen Lemma $\xi_i = x \cdot e_i = \psi(x) \cdot \psi(e_i) = \psi(x) \cdot e_i = \xi'_i$, also $x = \psi(x)$. **q.e.d.**

Ist nun $A \in \mathrm{I\!R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix (d.h. die Spalten bilden eine Orthonormalbasis des $\mathrm{I\!R}^n$, was besagt dass ${}^tAA$ die Einheitsmatrix ist), so ist bekanntlich die lineare Abbildung $\lambda_A : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}^n, x \mapsto Ax$ eine Isometrie. (Der Beweis ist nicht schwer: $Ax \cdot Ay = x \cdot ({}^tAAy)$.) Mit den Lemmata bewaffnet, können wir nun beweisen:

5. Satz: (von Euler) Eine Abbildung $\phi : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}^n$ ist genau dann eine Bewegung, wenn es eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{I\!R}^{n \times n}$ und einen Vektor $a \in \mathrm{I\!R}^n$ gibt, so dass für alle $x \in \mathrm{I\!R}^n$ gilt

$$\phi(x) = Ax + a = \tau_a \circ \lambda_A(x).$$

A und a sind durch ϕ eindeutig bestimmt.

Beweis: Offenbar ist $\tau_a \circ \lambda_A$ eine Bewegung. a ist eindeutig bestimmt wegen $\phi(0) = a$, und die i-te Spalte von A ist $\phi(e_i) - a$, also durch ϕ eindeutig bestimmt. Daher müssen wir nur noch die Existenz von A und a nachweisen.

Wir betrachten die Isometrie $\psi := \tau_{-\phi(0)} \circ \phi$, die nach 2. Lemma den Fixpunkt 0 hat. Wegen 3. Lemma bilden dann die $\psi(e_i)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{I\!R}^n$, also die Spalten einer orthogonalen Matrix, die mit A bezeichnet sei. Für die Bewegung $\lambda_A^{-1} \circ \psi$ ist dann $\lambda_A^{-1} \circ \psi(e_i) = A^{-1}Ae_i = e_i$ und $\lambda_A^{-1} \circ \psi(0) = A^{-1} \cdot 0 = 0$. Nach 4. Lemma folgt daraus $\lambda_A^{-1} \circ \psi = \mathrm{id}$, also $\psi = \lambda_A$ und $\phi = \tau_{\phi(0)} \circ \lambda_A$. **q.e.d.**

Die Bewegung im Satz wird kurz mit $\phi = (A, a)$ bezeichnet. Nach Eulers Satz ist $\mathcal{B}$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S_{\mathrm{I\!R}^n}$ (daher kommt die Benennung dieser Gruppe) mit der Verknüfung (nachprüfen!):

$$(A, a) \circ (A', a') = (AA', Aa' + a), \quad (A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a).$$

Es ist $\mathrm{id} = (I, 0)$ neutral (Einheitsmatrix I). Für orthogonale Matrizen gilt wegen ${}^tAA = I$ $\det(A) = \pm 1$.
Man hat die Untergruppe aller Translationen $\mathcal{T} := \{(I, a) \mid a \in \mathbb{R}^n\}$, die vermöge $a \to (I, a)$ isomorph zur Additionsgruppe von $\mathbb{R}^n$ ist. Offenbar besteht wegen $(A, a)(0) = a$ die Fixgruppe von 0 aus den $(A, 0)$, ist also isomorph zur orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}_n$ (besteht aus den orthogonalen Matrizen); der Isomorphismus ist $A \mapsto (A, 0)$. Man hat die eindeutige Zerlegung $(A, a) = (I, a) \circ (A, 0)$ von (A, a) in Translation und orthogonale Matrix. $\mathcal{T}$ ist eine normale Untergruppe von $\mathcal{B}$, denn es ist $(A, a)(I, b)(A, a)^{-1} = (I, Ab)$. Wer das 4. Übungsblatt bearbeitet hat, sieht jetzt, dass $\mathcal{B}$ ein semidirektes Produkt von $\mathcal{O}_n$ mit $(\mathbb{R}^n, +)$ ist (welches ist der zugehörige Homomorphismus $\mathcal{O}_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$) ?
Im LA-Skript von Rehm/Trinks finden Sie noch die Klassifikation der Bewegungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, diese ergeben sich leicht aus der sogenannten Drehkästchennormalform und einfachen Sätzen über Fixpunkte von Affinitäten. Für Leser ohne diese Kenntnisse in Geometrie soll hier in der Ebene alles Benötigte kurz direkt hergeleitet werden.
Bekanntlich ist

$$D_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix einer Drehung um den Winkel ϕ um den Nullpunkt bezüglich jeder Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ (der Leser wird hoffentlich damit zurechtkommen, dass hier ϕ einen Winkel, weiter oben aber eine Bewegung bezeichnet).
6. Lemma: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix. Dann ist $\det(A) \in \{1, -1\}$. Im Fall $\det(A) = 1$ ist A ein Drehkästchen. Im Fall $\det(A) = -1$ hat A die Eigenwerte ± 1. Sind b_1 und b_{-1} zugehörige Eigenvektoren, so ist $(A, 0)$ dann eine Spiegelung mit der Achse $\mathbb{R}b_1$.
Beweis:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann orthogonal, wenn die Zeilen und Spalten von A Orthonormalsysteme bilden, d.h. die Gleichungen
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ und $ab = -cd$ gelten.
Hieraus folgt $a^2 = d^2$ und $c^2 = b^2$, also $d = \epsilon a$ und $c = \delta b$ mit $\epsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Falls $a = 0$, so muss wegen $ab = -cd$ auch $d = 0$ sein und $|b| = 1 = |c|$, ebenso ist bei $b = 0$ dann $c = 0$ und $|a| = 1 = |d|$. Einer diese Fälle liegt vor, wenn $ab = 0$ ist.
Wir betrachten nun A mit $\det(A) = ad - bc = 1$. Ist $ab = 0$, so sieht man sehr leicht, dass $A = D_\phi$ ist für einen der Winkel $\phi = 0$ oder $\phi = \pm\pi$. Wir dürfen also von $ab \neq 0$ ausgehen. Dann kann man aus $ab = -cd = \epsilon\delta ab$ auf $\epsilon = -\delta$ schließen. Damit haben wir $c = \delta b$ und $d = -\delta a$, somit $1 = ad - bc = -\delta(a^2 + b^2) = -\delta$, also $a = d$ und $c = -b$. Ist für reelle Zahlen $a^2 + b^2 = 1$, so gibt es nach dem Satz

von Pythagoras einen Winkel $\phi \in \mathbb{R}$ mit $a = \cos\phi$ und $b = \sin\phi$. Dann ist aber $A = D_\phi$.
Nun verbleibt der Fall $ad - bc = -1$. Falls $ab = 0$, so ist die Behauptung wieder sehr leicht zu sehen. Wie im Fall $\det(A) = 1$ sieht man, wenn $ab \neq 0$ ist, $c = \delta b$ und $d = -\delta a$, aber nun ist $1 = \delta$, also $a + d = a - \delta a = 0$. Mit der Einheitsmatrix I berechnet man $\det(A - I) = (a-1)(d-1) - bc = \det(A) + 1 - (a+d) = 0$, ebenso $\det(A + I) = 0$. Daher hat A die Eigenwerte ± 1, und zugehörige Eigenvektoren b_1 und b_2 erfüllen $b_1 \cdot b_2 = (Ab_1) \cdot (Ab_2) = b_1 \cdot (-b_2) = -b_1 \cdot b_2$, woraus $b_1 \cdot b_2 = 0$ folgt: b_1 steht auf b_2 senkrecht. Für $u, v \in \mathbb{R}$ berechnet man $A(ub_1 + vb_2) = ub_1 - vb_2$. Das ist anschaulich eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}b_1$ als Spiegel. Darum heißt $(A, 0)$ Spiegelung und die Fixpunktgerade $\mathbb{R}b_1$ Achse dieser Spiegelung. **q.e.d.**
$x \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann ein Fixpunkt von (D_ϕ, a), wenn $-a = D_\phi x - x = (D_\phi - I)x$ gilt. Falls $D_\phi \neq I$ (solche Drehungen nennen wir echt) ist, besitzt $D\phi$ keinen rellen Eigenvektor, also auch keinen reellen Eigenwert. Dann ist aber $D_\phi - I$ invertierbar und (genau) ein Fixpunkt $x = -(D_\phi - I)^{-1} \cdot a$ vorhanden. Man überzeugt sich leicht, dass dann (D_ϕ, a) eine Drehung um den Punkt x mit unverändertem Winkel ϕ ist. Bei $\det(A) = 1$ hat man also eine Translation oder eine echte Drehung (nicht notwendig um 0), bei $\det(A) = -1$ eine Spiegelung gefolgt von Translation (hier Schiebspiegelung genannt). Wer Lust an geometrischen Rechnungen hat, kann noch (leicht) beweisen, dass eine Schiebspiegelung, wenn sie einen Fixpunkt besitzt, eine Spiegelung (an einer parallelen Achse) ist. Demnach haben wir den
7. Satz: (Klassifikation der ebenen Bewegungen)
In $\mathbb{R}^2$ gibt es nur folgende Bewegungen (A, a):
(i) Translationen (bei $A = I$), echte Drehungen um irgenwelche Zentren (bei det(A)=1, aber $A \neq I$),
(ii) Spiegelungen (an irgendwelchen Geraden) und Schiebspiegelungen ohne Fixpunkte ((ii) tritt bei $\det(A) = -1$ ein).
Daraus folgt, dass das Produkt zweier Drehungen (möglicherweise um verschiedene Zentren oder Winkel) oder zweier Schiebspiegelungen (auch bei verschiedenen Achsen) eine echte Drehung oder Translation ist. Das übersteigt schon das räumliche Vorstellungsvermögen der meisten Leute: durch Zusammensetzen zweier Drehungen um verschiedene Zentren (falls die die Summe s der Drehwinkel nicht $D_s = I$ erfüllt) entsteht eine Drehung um ein drittes Zentrum mit s als Drehwinkel.
In der ALGEBRA–Vorlesung haben wir nicht die Zeit, hier weiterzugehen. Ein großer Teil der Algebra entstand, damit geometrische Fragen durch Gleichungen beschrieben werden können und diese Gleichungen dann diskutiert werden können. Das machte erst die Analysis möglich und notwendig. Die reellen Zahlen, ein algebraisches Kostrukt, entstehen mathematisch zwangsläufig aus einfachsten philosophischen Annahmen über die Natur des Raums (z.B. dass alle Punkte gleichberechtigt sein sollen). (Das einzusehen, erfordert eine hochentwickelte Mathematik und wurde so erst im 20. Jahrhundert bewiesen.) Algebra und Geometrie haben sich im Laufe der Jahrhunderte gegenseitig ständig befruchtet. Leider gibt es kaum ein Algebra–Lehrbuch, das dem Rechnung trägt. (HPR)