Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
06.05.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 3

Ziel dieses Übungsblattes ist es, die *Fermatsche Vermutung* in speziellen Fällen zu beweisen. Diese inzwischen vollständig bewiesene Vermutung besagt, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

für ganzzahliges $n > 2$ keine Lösung mit $xyz \neq 0$ besitzt. Um dies einzusehen, genügt es, sich auf Primzahlen $n = p > 2$ zu beschränken, da der Fall $n = 4$ gerne in der Elementaren Zahlentheorie behandelt wird. Auf diesem Übungsblatt möchten wir die Fermatsche Vermutung im Fall $n = p > 2$ prim beweisen, sofern p weder xyz noch die Klassenzahl des p-ten Kreisteilungskörpers teilt.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie die Fermatsche Vermutung für $n = 3$ unter der Annahme $n \nmid xyz$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ und $k \in \mathbb{N}$ teilerfremd zur Klassenzahl von K. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ des Ganzheitsrings von K genau dann ein Hauptideal ist, wenn $\mathfrak{a}^k$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien p eine Primzahl, $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, $K := \mathbb{Q}(\zeta)$ der p-te Kreisteilungskörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$. Zeigen Sie:

(a) Das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$ ist $f(X) = \sum_{i=0}^{p-1} X^i$.

(b) Das Element $\pi := 1 - \zeta$ hat die Norm $N_{K/\mathbb{Q}}(\pi) = p$ und ist daher ein Primelement in $\mathcal{O}$.

(c) In $\mathcal{O}$ gilt die Zerlegung $(p) = (\pi)^{p-1}$.

(d) Es gilt $\mid d(1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2}) \mid = p^{p-2}$.

(e) Der Ganzheitsring von K ist $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\zeta]$. *Hinweis*: Es gilt $\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi + \mathbb{Z}[\zeta]$.

(f) Jede Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ läßt sich darstellen als $\varepsilon = \zeta^s \eta$ mit $\eta \in \mathcal{O}^\times \cap \mathbb{R}, 0 \leq s < p$. *Hinweis:* Alle Konjugierten von $\varepsilon\bar{\varepsilon}^{-1}$ haben Absolutbetrag 1 und hieraus folgt, dass es sich bei $\varepsilon\bar{\varepsilon}^{-1}$ um eine Einheitswurzel handelt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 3 sei $p > 3$ und die Klassenzahl von K teilerfremd zu p. Zeigen Sie unter der Annahme, dass x, y, z eine nichttriviale Lösung von Gleichung (1) mit $n = p \nmid xyz$ und $(x, y, z) = 1$ ist:

(a) Für alle $i \in \{2, \ldots, p\}$ sind $x + \zeta y$ und $x + \zeta^i y$ teilerfremd in $\mathcal{O}$.

(b) Es gibt $\alpha \in \mathcal{O}$, $\eta \in \mathcal{O}^\times \cap \mathbb{R}$ und $s \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit

$$x + \zeta y = \zeta^s \eta \alpha^p. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a) und die Aufgabe 2 und 3.

(c) Aus (b) folgt:

$$\zeta^{-s}(x + \zeta y) - \zeta^s(x + \zeta^{-1} y) \equiv 0 \mod p. \tag{3}$$

Um einzusehen, dass sich aus Gleichung (3) ein Widerspruch ergibt, betrachten wir die Menge $S := \{\overline{s}, \overline{s-1}, \overline{-s}, \overline{1-s}\}$, wobei $\overline{a} := a + p\mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie hierzu abschließend:

(d) Der Fall $\#S = 4$ und $\overline{-1} \notin S$ führt zu einem Widerspruch.

(e) Der Fall $\overline{-1} \in S$ impliziert $\#S = 4$ und führt zu einem Widerspruch.

(f) Der Fall $\#S < 4$ führt zu einem Widerspruch.
Hinweis: Analog zu (2) gilt $x - \zeta z = \zeta^{s'} \eta' \alpha'^p$.

Abgabe: Bis Montag, den 13.05.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.