Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

3.06.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, der bzgl. einer Bewertung $|\cdot|$ vollständig ist.

(a) Zeigen Sie: Ist die Bewertung $|\cdot|$ archimedisch, so besitzt sie auf jede algebraische Erweiterung F/K eine eindeutige Fortsetzung.

(b) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Zeigen Sie: Alle Normen auf V sind äquivalent, d.h., zu je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf V gibt es zwei Konstanten $\rho, \rho' > 0$, sodass $\rho \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \rho' \| x \|_2$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein diskret bewerteter Körper mit dem Bewertungsring $\mathcal{O}$ und dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$. Für $n \geq 1$ sei $U^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$ die n-te Einseinheitengruppe.
Zeigen Sie die folgenden Isomorphien:

$$\mathcal{O}^\times / U^{(n)} \cong (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)^\times \quad \text{und} \quad U^{(n)}/U^{(n+1)} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein lokaler Körper. Zeigen Sie: Ist $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ eine Folge, die gegen ein $z \in \mathbb{Z}_p$ konvergiert, so haben wir für alle $1 + x \in U^{(1)}$

$$(1+x)^z = \lim_{i\to\infty} (1+x)^{z_i}.$$

Somit wird $U^{(1)}$ zu einem $\mathbb{Z}_p$-Modul.

Abgabe: Bis Montag, den 10.06.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.