Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

10.06.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung. Zeigen Sie, dass der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ von K eine Ganzheitsbasis über $\mathbb{Z}_p$ besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$ die n-te Einseinheitengruppe eines lokalen Körpers K. Weiterhin sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\varepsilon_n \in U^{(n)}$.
Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} \varepsilon_n =: \prod\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ existiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien (K, v) ein bewerteter Körper, K_v seine Komplettierung bzgl. v und $\overline{K_v}$ der algebraische Abschluss von K_v. Desweiteren seien L, L' zwei endliche Erweiterungen von K und $\sigma : L \to L'$ ein K-Isomorphismus.
Zeigen Sie: σ lässt sich zu einem K_v-Isomorphismus $L \cdot K_v \to L' \cdot K_v$ fortsetzen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei L/K eine endliche Erweiterung algebraischer Zahlkörper. Die *Relativdiskriminante* $\mathfrak{d}_{L/K}$ von L/K ist definiert als die Norm der Differente von L/K:

$$\mathfrak{d}_{L/K} = \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{D}_{L/K}).$$

Weiter sei d_L die Diskriminante des Zahlkörpers L aus Kapitel I.
Zeigen Sie: Ist $K = \mathbb{Q}$, so gilt

$$(\mathbb{Z} : \mathfrak{d}_{L/\mathbb{Q}}) = |d_L|.$$

Mit anderen Worten, die Diskriminante ist das Hauptideal $\mathfrak{d}_{L/K} = (d_L)$.

Abgabe: Bis Montag, den 17.06.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.