Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
25.04.2012

Algebraische Zahlentheorie II – Übungsblatt 1

Auf diesem Übungsblatt, wie auch auf den folgenden, verstehen wir unter einer *Algebra* stets eine *unitäre assoziative* Algebra. Des Weiteren fordern wir, daß Homomorphismen zweier Algebren stets *unitär* sind, d.h. die 1 stets auf die 1 abbilden. Ist R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul, so verstehen wir unter einer *R-Derivation* $\mathrm{d} : A \to M$ eine R-lineare Abbildung, so daß für alle $a, b \in A$: $\mathrm{d}ab = a\mathrm{d}b + b\mathrm{d}a$ (wir nehmen uns die Freiheit, statt $\mathrm{d}(a)$ abkürzend $\mathrm{d}a$ zu schreiben; diese Schreibweise ist eindeutig, sofern wir M als A-Linksmodul auffassen).

Aufgabe 1

Es sei R ein kommutativer Ring und es bezeichne $P := R\,[X_1, ..., X_n]$ den Polynomring in n Unbestimmten über R und A eine kommutative Algebra über R. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existiert genau eine R-Derivation $\mathrm{d}_i : P \to P$ mit $\mathrm{d}_i X_i = 1$ und $\mathrm{d}_i X_j = 0$ für $i \neq j$.

(b) Jede R-Derivation $\mathrm{d} : P \to P$ lässt sich eindeutig darstellen als $d = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathrm{d}_i$ mit $r_i \in R[X_1, ..., X_n]$ und d_i wie in (a).

(c) Für jede R-Derivation d von A, für jedes Tupel $x = (x_1, ..., x_n) \in A^n$ und für jedes Polynom $f \in P$ gilt $\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}_i f)(x)\mathrm{d}x_i$.

Aufgabe 2

Es sei R ein kommutativer Ring und A und B zwei kommutative R-Algebren. Ein (A, B)-*Bimodul* ist eine abelsche Gruppe M, versehen mit einer A-Modulstruktur und einer B-Modulstruktur, so daß für alle $r \in R, a \in A, b \in B, m \in M$ gilt:

$$a(bm) = b(am) \quad \text{und} \quad (r1_A)m = (r1_B)m.$$

Ein (A, B)-Bimodul-Homomorphismus $f : M \to N$ ist eine Abbildung, welche zugleich ein A- und ein B-Modulhomomorphismus ist. Zeigen Sie:

(a) Eine (A, B)-Bimodulstruktur auf M induziert auf M eine kanonische $A \otimes_R B$-Modulstruktur.

(b) Eine $A \otimes_R B$-Modulstruktur auf M induziert auf M eine kanonische (A, B)-Bimodulstruktur.

(c) Die Kategorie der (A, B)-Bimoduln ist isomorph zur Kategorie der $A \otimes_R B$-Moduln.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Es sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Wir fassen $M := A \otimes_R A$ vermöge der beiden Verknüpfungen $A \times M \to M, (a, b \otimes c) \mapsto (ab) \otimes c$ und $(a, b \otimes c) \mapsto b \otimes (ac)$ als (A,A)-Bimodul auf. Die Algebra A läßt sich vermöge $(a,b) \mapsto ab$ ebenfalls als (A,A)-Bimodul auffassen. Zeigen Sie:

(a) Die Vorschrift $a \otimes b \mapsto ab$ induziert einen (A,A)-Bimodulhomomorphismus $m : M \to A$.

(b) Fassen wir M als Algebra auf, so ist der Kern I von m ein Ideal in M.

(c) $\mathrm{d}_A : A \to I, a \mapsto (a \otimes 1) - (1 \otimes a)$ ist eine R-Derivation.

(d) Das Bild von d_A erzeugt I als A-Modul.

Aufgabe 4

Bezeichne I den A-Modul aus Aufgabe 3. Der A-Modul $\Omega_{A/R} = I/I^2$ heißt dann der *Differentialmodul* von A/R und die von d_A induzierte Abbildung $\mathrm{d}_{A/R} : A \to \Omega_{A/R}$ ist eine R-Derivation. $(\Omega_{A/R}, \mathrm{d}_{A/R})$ hat folgende universelle Eigenschaft: zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation $\mathrm{d} : A \to M$ existiert genau ein A-Modulhomomorphismus $g : \Omega_{A/R} \to M$ mit $\mathrm{d} = g \circ \mathrm{d}_{A/R}$.

(a) Bestimmen Sie $\Omega_{R[X_1,\ldots,X_n]/R}$ unter Verwendung von Aufgabe 1.

(b) Sei L/K eine Erweiterung von Zahlkörpern und bezeichne $\mathcal{O}_L$ bzw. $\mathcal{O}_K$ die entsprechenden Ganzheitsringe. Wir betrachten den Fall $\mathrm{d}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} : \mathcal{O}_L \to \Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$. Zeigen Sie, daß für die Differente

$$D_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} = \{x \in \mathcal{O}_L \mid x \mathrm{d}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} y = 0 \quad \text{für alle} \quad y \in \mathcal{O}_L\}$$

gilt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß im lokalen Fall stets ein $x \in \mathcal{O}_{L,w}$ mit $\mathcal{O}_{L,w} = \mathcal{O}_{K,v}[x]$ existiert und daß für jede nicht-archimedische Bewertung v von K gilt:

$$\mathcal{O}_{L,v} := \mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,v} = \bigoplus_{w|v} \mathcal{O}_{L,w}$$

und

$$\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,v} \cong \bigoplus_{w|v} \Omega_{\mathcal{O}_{L,w}/\mathcal{O}_{K,v}}.$$