Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

27.06.2012

Algebraische Zahlentheorie II – Übungsblatt 10

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir aus dem Zusammenspiel der lokalen Klassenkörpertheorie mit der Kummertheorie das *Hilbertsymbol* ableiten. Hierzu sei $n > 0$ beliebig, K ein lokaler Körper oder $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und es bezeichne L/K die maximale abelsche Erweiterung von K vom Exponenten n. Wir nehmen an, daß K die n-ten Einheitswurzeln μ_n enthält und bezeichnen mit $\mathfrak{p}$ die Primstelle von K. Zeigen Sie:

(i) Die (im gruppentheoretischen Sinne) bilineare Paarung

$$\mathrm{Gal}(L/K) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L/K), \mu_n) \to \mu_n, \quad (\sigma, \chi) \mapsto \chi(\sigma),$$

liefert via Klassenkörpertheorie und Kummertheorie eine nicht ausgeartete bilineare Paarung

$$\left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{p}}\right) : K^\times / K^{\times n} \times K^\times / K^{\times n} \to \mu_n.$$

(ii) Es seien $a, b \in K^\times$ und $c \in L^\times$ mit $c^n = b$. Dann gilt

(a)
$$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{(a, K(c)/K)(c)}{c},$$

(b)
$$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \Longleftrightarrow a \in N_{K(c)/K} K(c)^\times,$$

(c)
$$\left(\frac{a, 1-a}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a, -a}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

(d)
$$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{b, a}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

(iii) Für $n = 2$ gilt

$$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \Longleftrightarrow ax^2 + by^2 = z^2 \text{ ist in } K \text{ nichttrivial lösbar.}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2

Es sei $n > 0$, K ein lokaler Körper, welcher die Menge μ_n der n-ten Einheitswurzeln enthält und es bezeichne $\mathfrak{p}$ die Primstelle von K. Wir setzen voraus, daß die Restklassenkörpercharakteristik von K zu n teilerfremd ist. Unter diesen Voraussetzungen definieren wir für ein beliebiges Primelement $\pi \in K$ das *Legendresymbol* als

$$\left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}}\right) : U_K \to \mu_n, \quad u \mapsto \left(\frac{\pi, u}{\mathfrak{p}}\right).$$

Zeigen Sie:

(i) Das Legendresymbol ist ein Gruppenhomomorphismus und hängt nicht von der Wahl des Primelementes π ab.

(ii) Für $u \in U_K$ gilt

$$\left(\frac{u}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \Longleftrightarrow u \text{ ist eine } n\text{-te Potenz modulo } \mathfrak{p}.$$

Und genauer gilt

$$\left(\frac{u}{\mathfrak{p}}\right) \equiv u^{\frac{q-1}{n}} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}),$$

wobei q die Kardinalität des Restklassenkörpers von K bezeichnet.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die für $n \in \{2, 3\}$ die Werte der beiden Hilbertsymbole

$$\left(\frac{10, 31}{5}\right), \left(\frac{28, -26}{13}\right),$$

entsprechend über $\mathbb{Q}_5(\zeta_n)$ bzw. $\mathbb{Q}_{13}(\zeta_n)$, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel bezeichnet.