Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

23.05.2012

Algebraische Zahlentheorie II – Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Es seien $m \in \mathbb{N}$, k ein Körper mit char $k \nmid m$ und es bezeichne $\mu_m(k)$ die Gruppe der m-ten Einheitswurzeln in $k^\times$ und $\bar{k}$ den separablen Abschluß von k, sowie $G = G(\bar{k}/k)$ die absolute Galoisgruppe von k. Wir fassen $\bar{k}^\times$ als G-Modul auf und betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mu_m(\bar{k}) \longrightarrow \bar{k}^\times \xrightarrow{m} \bar{k}^\times \longrightarrow 0,$$

wobei m die Potenzierung mit m bezeichne. Folgern Sie hieraus:

(a) Es gibt einen Isomorphismus $\delta : k^\times/k^{\times m} \to H^1(G, \mu_m(\bar{k}))$.

(b) Enthält k die m-ten Einheitswurzeln, so gilt $\mathrm{Hom}(G, \mu_m(k)) \cong k^\times/k^{\times m}$.

(c) Geben Sie den Isomorphismus aus (b) explizit an.

Aufgabe 2

Sei $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Kummererweiterungen eines Körpers K in einem festen algebraischen Abschluß und sei F das Kompositum der ${F_i}'s$. Zeigen Sie: F/K ist ebenfalls eine Kummererweiterung.

Aufgabe 3

Sei G eine abelsche Gruppe und $X(G)$ ihre Charaktergruppe. Zeigen Sie:

(a) $X(G/H) \cong \{\chi \in X(G) : \ \chi|_H = 1\}$ für alle $H \leq G$.

(b) $H \longmapsto X(G/H)$ ist eine 1-1-Korrespondenz zwischen den Untergruppen H von G und den Charaktergruppen der Faktorgruppen von G.