Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

06.06.2012

Algebraische Zahlentheorie II – Übungsblatt 7

Auf diesem Übungsblatt sei G eine pro-endliche Gruppe, A ein stetiger G-Modul, der das Klassenkörperaxiom erfüllt.

Aufgabe 1

Sei n eine natürliche Zahl, und sei die Gruppe $\mu_n = \{\xi \in A \,|\, \xi^n = 1\}$ zyklisch von der Ordnung n und $A \subset A^n$. Sei G_K eine abgeschlossene Untergruppe von G mit Fixkörper K und es gelte $\mu_n \subset A_K$. Sei L/K die maximale abelsche Erweiterung vom Exponenten n. Zeigen Sie: Ist L/K endlich, so ist $N_{L/K}A_L = A_K^n$.

Aufgabe 2

Sei G nun eine *pro-p-Gruppe*, d.h. projektiver Limes von endlichen p-Gruppen, $d : G \to \mathbb{Z}_p$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und A ein G-Modul. Eine *henselsche p-Bewertung* ist dann ein Gruppenhomomorphismus $v : A_k \to \mathbb{Z}_p$, welcher für alle endlichen Erweiterungen K/k den beiden Bedingungen

(i) $\mathbb{Z} \subset v(A_K)$ und $v(A_K)/nv(A_K) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für alle $n = p^k$, $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $v(N_{K/k}A_K) = f_K v(A_K), f_K = (d(G_k) : d(G_K))$,

genügt. Zeigen Sie für jede endliche galoissche Erweiterung L/K bzgl. G die Existenz eines kanonischen Reziprozitätshomomorphismus $r_{L/K} : G(L/K)^{ab} \to A_K/N_{L/K}A_L$, unter der Voraussetzung, daß für jede endliche unverzweigte Erweiterung $G(L/K)$ gilt, daß $H^i(G(L/K), U_L) = 1$ für $i \in \{-1, 0\}$, wobei $U_L = \{u \in A_L \,|\, v_L(u) = 0\}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ist L/K eine endliche galoissche Erweiterung und K' ein Zwischenkörper, so haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G(L/K')^{ab} & \xrightarrow{r_{L/K'}} & A_{K'}/N_{L|K'}A_L \\ {\scriptstyle \mathrm{Ver}}\uparrow & & \uparrow \\ G(L/K)^{ab} & \xrightarrow{r_{L|K}} & A_K/N_{L/K}A_L, \end{array}$$

wobei der rechte Pfeil durch die Inklusion induziert wird.