Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

13.06.2012

# Algebraische Zahlentheorie II – Übungsblatt 8

## Aufgabe 1

Es sei $p$ eine Primzahl und $G$ eine proendliche Gruppe. Für eine abgeschlossene Untergruppe $H \leq G$ definieren wir $p \mid (G:H) :\Longleftrightarrow$ es existiert eine offene Untergruppe $U \leq G$ mit $p \mid (G/U : H/(H \cap U))$. $H$ nennen wir *pro-p-Gruppe*, falls $H$ ein projektiver Limes von endlichen $p$-Gruppen ist und $H$ heißt *p-Sylow-Gruppe* von $G$, falls $H$ eine pro-$p$-Gruppe ist und $p \nmid (G:H)$. Zeigen Sie:

(i) Sind $K \leq H \leq G$ abgeschlossene Untergruppen, so gilt $p \mid (G:K) \Longleftrightarrow p \mid (G:H)$ oder $p \mid (H:K)$.

(ii) $p \nmid (G:1) \Longleftrightarrow G \to G, x \mapsto x^p$ ist surjektiv $\Longleftrightarrow G \to G, x \mapsto x^p$ ist bijektiv.

(iii) In $G$ existiert mindestens eine $p$-Sylow-Gruppe.

(iv) Je zwei $p$-Sylowgruppen von $G$ sind konjugiert.

(v) Jede pro-$p$-Gruppe von $G$ ist in einer $p$-Sylow-Gruppe von $G$ enthalten.

(vi) Ist $f: G \to G'$ ein surjektiver Homomorphismus proendlicher Gruppen, dann ist das Bild einer $p$-Sylow-Gruppe von $G$ eine $p$-Sylow-Gruppe von $G'$.

## Aufgabe 2

In der abstrakten Galoistheorie versehen wir die Gruppe $A_K$ für jeden Körper $K$ mit einer Topologie, indem wir die Nebenklassen $aN_{L/K}A_L$ als Umgebungsbasis von $a \in A_K$ auszeichnen, wobei $L/K$ alle endlichen galoisschen Erweiterungen von $K$ durchläuft. Wir nennen diese Topologie die *Normtopologie* von $A_K$.
Zeigen Sie: $A_K$ ist hausdorffsch genau dann, wenn die Gruppe $A_K^0 := \bigcap_L N_{L/K}A_L$ der *universellen Normen* trivial ist.