Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

20.06.2012

Algebraische Zahlentheorie II – Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Es sei $(K, |\cdot|_p)$ ein lokaler nichtarchimedisch bewerteter Körper und L/K eine (nicht notwendigerweise endliche) algebraische Erweiterung. Wir nennen L/K *unverzweigt*, falls L Vereinigung endlicher unverzweigter Erweiterungen von K ist. Wir bezeichnen mit λ/κ die entsprechende Erweiterung der Restklassenkörper und mit μ^{p^∞} die Menge aller Einheitswurzeln im algebraischen Abschluß von K, welche eine zu $p := \operatorname{char} \kappa$ teilerfremde Ordnung haben. Zeigen Sie:

(i) L/K ist genau dann endlich, wenn L ein lokaler Körper ist.

(ii) Der Betrag $|\cdot|_p$ von K setzt sich eindeutig auf L fort.

(iii) L/K ist genau dann unverzweigt, wenn $|L|_p = |K|_p$.

(iv) L/K ist genau dann unverzweigt, wenn L/K galoissch ist und der kanonische Homomorphismus $\operatorname{Gal}(L/K) \to \operatorname{Gal}(\lambda/\kappa)$ ein Isomorphismus ist.

(v) L/K ist genau dann unverzweigt, wenn L durch Adjunktion einer Teilmenge $\mu_L \subset \mu^{p^\infty}$ entsteht. Insbesondere ist L/K genau dann endlich unverzweigt, wenn μ_L endlich ist.

(vi) Die maximale unverzweigte Erweiterung K_{un} von K entsteht durch Adjunktion von μ^{p^∞} zu K, der Restklassenkörper von K_{un} ist der algebraische Abschluß von κ und es gilt $\operatorname{Gal}(K_{\mathrm{un}}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 2

Sei K ein lokaler Körper mit Restkörpercharakteristik p und L der durch alle Einheiteswurzeln von p-Potenzordnung erzeugte Körper. Zeigen Sie, daß der Fixkörper der Torsionsuntergruppe von $\operatorname{Gal}(L/K)$ eine $\mathbb{Z}_p$-*Erweiterung*(d.h. Erweiterung mit zu $\mathbb{Z}_p$ isomorpher Galoisgruppe) ist. Diese heißt *zyklotomische* $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung.