Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

26.10.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ euklidisch ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Für eine quadratfreie ganze Zahl $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ seien

$$\omega_d := \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{falls } d \equiv 1 \bmod (4), \\ \sqrt{d} & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad \omega'_d := \begin{cases} \frac{1-\sqrt{d}}{2} & \text{falls } d \equiv 1 \bmod (4), \\ -\sqrt{d} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Seien $\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \theta \cdot \mathbb{Z}$. Zeige, dass $\mathcal{O}$ genau dann ein Teilring von $\mathbb{C}$ ist, wenn es $u, v, d \in \mathbb{Z}$ gibt mit $v \neq 0$, $d \neq 0, 1$ und d quadratfrei, so dass $\theta = u + v\omega_d$ gilt.

Sei von nun an speziell $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \omega_d \cdot \mathbb{Z}$.

(b) Bestimme für $d < 0$ die Einheitengruppe von $\mathcal{O}$.

Hinweis: Zeige dafür $\mathcal{O}^\times \subseteq \{u + v\omega_d \in \mathcal{O} \mid |(u + v\omega_d)(u + v\omega'_d)| = 1\}$.

(c) Zeige, dass für $d > 0$ der Ring $\mathcal{O}$ unendlich viele Einheiten hat.

Hinweis: Zeige dafür:

(1) Für alle $n > 1 \in \mathbb{N}$ gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq v \leq n+1$, so dass: $|u+v\omega_d| < \frac{1}{n}$.

(2) Unabhängig von n gilt für diese $u, v \in \mathbb{Z}$: $|(u + v\omega_d)(u + v\omega'_d)| < 3\sqrt{d} + 1$.

(3) Es gibt ein $m \in \{1, \ldots, \lfloor 3\sqrt{d} + 1 \rfloor\}$ und $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ mit $\alpha \neq \pm\beta$, $m \,|(\alpha - \beta)$ in $\mathcal{O}$ und $|\mathcal{N}(\alpha)| = |\mathcal{N}(\beta)| = m$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist $1 \in S$ und $M_S = \{\mathfrak{a} \trianglelefteq R \mid \mathfrak{a} \cap S = \varnothing\}$ nicht leer, so ist jedes bezüglich der Inklusion maximale Element von M_S ein Primideal von R.

(b) Unter den Voraussetzungen von (a) ist M_S induktiv geordnet.

(c) Aus (a) und (b) folgt, dass jedes von R verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ von R in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R enthalten ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 2. November 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.