Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

2.11.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeige, dass faktorielle Ringe ganzabgeschlossen sind.

Sei nun A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich und $L/\operatorname{Quot}(A)$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige die folgenden Aussagen:

(b) Der ganze Abschluss B von A in L ist ganzabgeschlossen.

(c) Jedes $\beta \in L$ hat die Form $\beta = \frac{b}{a}$ mit $b \in B$ und $a \in A$.

(d) Ein $\beta \in L$ ist genau dann ganz über A, wenn sein Minimalpolynom Koeffizienten in A hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ eine quadratfreie ganze Zahl und d die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Zeige folgende Aussagen:

(a) $d = \begin{cases} D & \text{falls } D \equiv 1 \bmod (4), \\ 4D & \text{sonst.} \end{cases}$

Im ersten Fall ist durch $\{1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{D})\}$ eine Ganzheitsbasis (des ganzen Abschlusses von $\mathbb{Z}$ in K) gegeben, im zweiten Fall durch $\{1, \sqrt{D}\}$.

(b) Unabhängig von der Fallunterscheidung in (a) ist $\{1, \frac{1}{2}(d+\sqrt{d})\}$ immer eine Ganzheitsbasis (des ganzen Abschlusses von $\mathbb{Z}$ in K).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Weiter sei zu einem Element $\alpha \in K$ mit $\mu_\alpha \in \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(K)$ die Multiplikation mit α bezeichnet.

(a) Gib alle Körperhomomorphismen von K nach $\mathbb{C}$ an.

(b) Bestimme für folgende Werte von α das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von μ_α und Norm und Spur von α:

(i) $\sqrt[4]{2}$, (ii) $\sqrt{2}$, (iii) 2, (iv) $1+\sqrt{2}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige, dass für die Diskriminante d eines Zahlkörpers K stets $d \equiv 0 \bmod (4)$ oder $d \equiv 1 \bmod (4)$ gilt.

Hinweis: Sind σ_i die Einbettungen von K nach $\bar{\mathbb{Q}}$ und $\{\omega_i\}$ eine Ganzheitsbasis von K, so besteht $\det(\sigma_i\omega_j)$ aus einer Summe von Termen. Betrachte P und M, die Summe der Terme mit einem Plus- bzw. einem Minuszeichen.

Abgabe: Bis Freitag, den 9. November 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.