Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

9.11.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Zahlkörper und $\mathcal{O}_K$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in K. Weiter seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ endlich erzeugte $\mathcal{O}_K$-Untermoduln von K mit $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Zeige, dass der Index $(\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$ endlich ist und dass gilt:

$$d(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})^2 \cdot d(\mathfrak{b}).$$

Hinweis: Verwende den Elementarteilersatz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeige, dass ein Dedekindring mit nur endlich vielen Primidealen ein Hauptidealring ist.

(b) Gib ein Beispiel für einen Dedekindring mit genau 42 Primidealen an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und $\mathfrak{a} = R \cdot 2 + R \cdot (1 + \sqrt{-5})$. Bestimme $\mathfrak{a}^2$ und $\mathfrak{a}^{-1}$.

(b) Sei R ein Dedekindring und $\mathfrak{a} = R \cdot a + R \cdot b$. Zeige, dass dann gilt: $\mathfrak{a}^{-1} = (a^{-1}) \cap (b^{-1})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Dedekindring und $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeige folgende Aussagen:

(a) $R/\mathfrak{a}$ ist ein Hauptidealring.

(b) Jedes Ideal in einem Dedekindring kann von zwei Elementen erzeugt werden.

Hinweis: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^n$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ und $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$, so gilt $\mathfrak{p}^i = R \cdot \pi^i + \mathfrak{p}^n$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

Abgabe: Bis Freitag, den 16. November 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.