Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

16.11.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass in einem Dedekindring $\mathcal{O}$ der Durchschnitt endlich vieler paarweise koprimer Ideale gleich ihrem Produkt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und Γ ein Gitter in V mit Grundmasche M. Zeige, dass Γ genau dann vollständig ist, wenn V die Vereinigung der Translate $M + \gamma$ mit $\gamma \in \Gamma$ ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $\Gamma \leq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter. Zeige, dass eine Untergruppe $\Gamma' \leq \Gamma$ von endlichem Index in Γ stets ebenfalls ein vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^n$ ist und für die Volumina die folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{vol}(\Gamma') = (\Gamma : \Gamma') \cdot \mathrm{vol}(\Gamma).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\varrho \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel und bezeichne $\mathcal{O} := \mathbb{Z}[\varrho]$. Bestimme alle Primelemente von $\mathcal{O}$, indem du folgende Aussagen zeigst:

(a) Bezüglich der Normabbildung $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\varrho)/\mathbb{Q}}$ ist $\mathcal{O}$ ein euklidischer Ring, also auch faktoriell und ganzabgeschlossen.

(b) Jede Primzahl p mit $p \equiv 2 \bmod (3)$ ist ein Primelement in $\mathcal{O}$.

Hinweis: Zeige dafür, dass die Gleichung $a^2 - ab + b^2 = 2$ in $\mathbb{F}_3$ unlösbar ist.

(c) Die Primzahl 3 ist in $\mathcal{O}$ zum Quadrat eines Primelements $\pi \in \mathcal{O}$ assoziiert.

Hinweis: Betrachte für ein $u \in \mathbb{Z}$ mit $3 \,|\, (u^2 + u + 1)$ das Gitter $(1 - u\varrho)\mathbb{Z} + 3\varrho\mathbb{Z}$ in $\mathbb{C}$ und wende den Minkowski'schen Gitterpunktsatz an.

(d) Jede Primzahl p mit $p \equiv 1 \bmod (3)$ zerfällt in $\mathcal{O}$ in das Produkt zweier nicht assoziierter Primelemente $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{O}$.

Hinweis: Das zeigt man wie in (c).

(e) Jedes Primelement $\pi \in \mathcal{O}$ ist assoziiert zu einem der in (b), (c) und (d) genannten.

Hinweis: Betrachte jeweils das Ideal $\mathbb{Z} \cap \pi\mathcal{O}$

Abgabe: Bis Freitag, den 23. November 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.