Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

23.11.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 5

Das Ziel dieses Übungsblattes ist es, die *Fermat'sche Vermutung* in speziellen Fällen zu beweisen. Diese mittlerweile vollständig bewiesene Vermutung besagt, dass die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

für ganzzahliges $n > 2$ keine Lösung mit $abc \neq 0$ besitzt. Auf diesem Blatt werden wir die Fälle $n = p > 2$ prim beweisen, in denen p weder abc noch die Klassenzahl des p-ten Kreisteilungskörpers teilt.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeige die Fermat'sche Vermutung für $n = 3$ unter der Annahme, dass n kein Teiler von abc ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ und $k \in \mathbb{N}$ teilerfremd zur Klassenzahl h von K. Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}$ genau dann ein Hauptideal ist, wenn $\mathfrak{a}^k$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$. Zeige, dass für alle $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}$ gilt:

$$\mathfrak{N}(\alpha\mathcal{O}) = |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|.$$

Hinweis: Denke an den Beweis von Aufgabe 1 von Blatt 3.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, $K := \mathbb{Q}(\zeta)$ der p-te Kreisteilungskörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$ ist $\sum_{i=0}^{p-1} X^i$.

(b) Das Element $\pi := 1 - \zeta$ hat die Norm $N_{K/\mathbb{Q}}(\pi) = p$ und ist daher ein Primelement in $\mathcal{O}$.
Hinweis: Verwende Aufgabe 3.

(c) In $\mathcal{O}$ gilt die Zerlegung $(p) = (\pi)^{p-1}$.

(d) Es gilt $|d(1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2})| = p^{p-2}$.

(e) Der Ganzheitsring von K ist $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\zeta]$.
Hinweis: Es gilt $\mathcal{O} = \pi\mathcal{O} + \mathbb{Z}[\zeta]$.

(f) Jede Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ lässt sich darstellen als $\varepsilon = \zeta^s \eta$ mit $\eta \in \mathcal{O}^\times \cap \mathbb{R}$ und $0 \leq s < p$.
Hinweis: Alle Konjugierten von $\varepsilon\bar{\varepsilon}^{-1}$ haben Absolutbetrag 1, so dass $\varepsilon\bar{\varepsilon}^{-1}$ eine Einheitswurzel ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Mit den Bezeichnungen aus der vorigen Aufgabe sei $p > 3$ und die Klassenzahl von K teilerfremd zu p. Zeige unter der Annahme, dass (a, b, c) eine nichttriviale Lösung von Gleichung (1) mit $n = p \nmid abc$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ ist, die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $i \in \{2, \ldots, p\}$ sind $a + \zeta b$ und $a + \zeta^i b$ teilerfremd in $\mathcal{O}$.

(b) Es gibt ein $\alpha \in \mathcal{O}$, ein $\eta \in \mathcal{O}^\times \cap \mathbb{R}$ und ein $s \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit

$$a + \zeta b = \zeta^s \eta \alpha^p. \tag{2}$$

Hinweis: Verwende Teil (a) und die Aufgaben 2 und 4.

(c) Aus (b) folgt

$$\zeta^{-s}(a + \zeta b) - \zeta^s(a + \zeta^{-1} b) \equiv 0 \bmod (p). \tag{3}$$

Um einzusehen, dass sich aus Gleichung (3) ein Widerspruch ergibt, betrachten wir das Bild S der Menge $\{s, -s, s-1, 1-s\}$ unter der natürlichen Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeige dafür abschließend:

(b) Der Fall $|S| = 4$ und $-1 \neq S$ führt auf einen Widerspruch.

(c) Der Fall $-1 \in S$ führt auf $|S| = 4$ und auf einen Widerspruch.

(d) Der Fall $|S| < 4$ führt zu einem Widerspruch.

Hinweis: Analog zu Gleichung (2) gilt $a - \zeta c = \zeta^{s'} \eta' \alpha'^p$.

Abgabe: Bis Freitag, den 30. November 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.