Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

30.11.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei K ein Zahlkörper von Grad n über $\mathbb{Q}$ mit Diskriminante $d_K \in \mathbb{Z}$. Bezeichne r die Anzahl der reellen und $2s$ die Anzahl der komplexen Einbettungen von K. Zeige, dass in jeder Idealklasse von K ein Ideal $\mathfrak{a}$ existiert mit

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq \frac{n!}{n^n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^s \sqrt{|d_K|}.$$

Hinweis: Du darfst ohne Beweis verwenden, dass für jedes $t > 0$ die Menge

$$M_t = \{(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \mid \sum_{i=1}^{r} |x_i| + \sum_{j=1}^{s} 2|z_j| < t\}$$

das Volumen $2^r \pi^s t^n / n!$ hat.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei α über $\mathbb{Q}$ algebraisch mit Minimalpolynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n. Zeige, dass dann gilt:

$$d(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(f'(\alpha)).$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Klassenzahl von $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ bestimmt werden. Gehe dafür wie folgt vor:

(a) Bestimme in K: den Ganzheitsring $\mathcal{O}$, eine Ganzheitsbasis B, die Diskriminante d_K und eine Konstante $c > 0$, so dass in jeder Idealklasse ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq c$ existiert.

(b) Bestimme die endliche Menge $S \subset I(\mathcal{O})$ der ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}$ mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq c$.

Hinweis: Erinnere dich an Aufgabe 4 von Blatt 3 und setze $\mathfrak{a} = (a_1, a_2)$ mit $a_1 \in \mathbb{Z}$ an.

(c) Bestimme die Klassenzahl von K, indem du ein Repräsentantensystem $R \subseteq S$ für die Idealklassengruppe auswählst.

Hinweis: Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in S$ sind genau dann äquivalent, wenn für ein geeignetes $0 \neq \gamma \in \mathcal{O}$ das Ideal $\gamma\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ ein Hauptideal ist. Letzteres kannst du dadurch überprüfen, dass du bis auf Assoziierte sämtliche $\alpha \in \mathcal{O}$ mit $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| = \mathfrak{N}(\gamma\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$ bestimmst.

Abgabe: Bis Freitag, den 7. Dezember 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.