Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

7.12.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}(\beta), \mathbb{Q}(\gamma)$ drei algebraische Zahlkörper mit

$$\alpha^3 - 44\alpha - 113 = 0, \quad \beta^3 - 8\beta - 15 = 0, \quad \gamma^3 + 10\gamma - 1 = 0.$$

(a) Zeige, dass alle drei Körper die gleiche Diskriminante haben.

Hinweis: Bestimme allgemein für eine Nullstelle ϑ des Polynoms $f(X) = X^3 + aX + b$ die Diskriminante $d(1, \vartheta, \vartheta^2)$.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}(\beta), \mathbb{Q}(\gamma)$ paarweise nicht isomorph sind.

Hinweis: Studiere dafür, wie verschiedene Primzahlen in den jeweiligen Körpererweiterungen zerfallen.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, so dass das Minimalpolynom $f_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ von α eisensteinsch bezüglich einer Primzahl p ist. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) p teilt den Index $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$ nicht.

(b) (p) ist total verzweigt in K.

(c) Sei nun speziell $\alpha = \sqrt[3]{d}$ für $d = ab^2 > 1$ mit teilerfremden, quadratfreien natürlichen Zahlen a, b. Dann gibt es Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ von K, so dass das Ideal (3) in K die folgende Primfaktorzerlegung hat:

$$\begin{aligned} (3) &= \mathfrak{p}^3, & \text{falls} \quad & d \not\equiv \pm 1 \bmod (9), \\ (3) &= \mathfrak{p}^2\mathfrak{q} \text{ mit } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}, & \text{falls} \quad & d \equiv \pm 1 \bmod (9). \end{aligned}$$

Hinweis: Für $d \equiv \pm 1 \bmod (9)$ betrachte die Normen $N_{K/\mathbb{Q}}(\omega)$ und $N_{K/\mathbb{Q}}(\omega \pm 1)$ für

$$\omega = \frac{1}{3}(1 + x\sqrt[3]{ab^2} + y\sqrt[3]{a^2b}) \text{ mit } x = \pm 1,\ y = \pm 1,\ xa \equiv yb \equiv 1 \bmod (3).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}[X]$ ein injektiver Ringhomomorphismus.

(a) Bestimme, über welchen von (0) verschiedenen Primidealen in $\mathbb{C}[T]$ es verzweigte Primideale in $\mathbb{C}[X]$ gibt.

(b) Zeige, dass gilt:
$$\operatorname{Grad}(\varphi(T)) - 1 = \sum_{\mathfrak{P}} (e_{\mathfrak{P}} - 1),$$
wobei die Summe auf der rechten Seite über die verzweigten Primideale $\mathfrak{P} \subset \mathbb{C}[X]$ läuft.

Abgabe: Bis Freitag, den 14. Dezember 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.