Universität Karlsruhe 14.12.2007
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Seien $p \neq q$ ungerade Primzahlen und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. In dieser Aufgabe soll das *Quadratische Reziprozitätsgesetz* (siehe Aufgabenteile (b) und (f)) Schritt für Schritt aus dem uns mittlerweile Bekannten hergeleitet werden. Dafür definieren wir zunächst das *Legendresymbol* für p als

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \text{ gibt mit } b^2 = a + p\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{falls } p \mid a, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige nun die folgenden Aussagen:

(a) Die vom Legendresymbol induzierte Abbildung $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, da gilt:
$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod (p).$$

(b) Es gelten
$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ und } \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Bemerkung: Das sind die so genannten *Ergänzungssätze* zum Reziprozitätsgesetz.

(c) Das Primideal (q) ist genau dann voll zerlegt in $\mathbb{Q}(\sqrt{p'})$ mit $p' := (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$, wenn $\left(\frac{p'}{q}\right) = 1$.

(d) Es gibt ein $\omega \in \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\omega^2 = p'$, weshalb $\mathbb{Q}(\sqrt{p'}) \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ gilt.

Hinweis: Erinnere dich an Aufgabe 4 von Blatt 5 und betrachte das Produkt $\eta := \prod_{i=1}^{(p-1)/2} (1 - \zeta^i)$. Dann gilt
$$\eta^2 / N_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}(1 - \zeta) = \zeta^k (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$
für ein geeignetes $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

(e) Das Primideal (q) ist genau dann voll zerlegt in $\mathbb{Q}(\sqrt{p'})$, wenn (q) in $\mathbb{Q}(\zeta)$ in eine gerade Anzahl von Primidealen zerfällt.

(f) In $\mathbb{Q}(\zeta)$ zerfällt (q) genau dann in eine gerade Anzahl von Primidealen, wenn $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.

Hinweis: Stelle mithilfe von Aufgabenteil (a) einen Zusammenhang zum Trägheitsgrad eines über (q) liegenden Primideals von $\mathbb{Q}(\zeta)$ her.

(g) Aus den Aufgabenteilen (b) bis (e) folgt:
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Bemerkung: Das ist die eigentliche Aussage des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes.

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei zunächst allgemein L/K eine endliche Galoiserweiterung eines Körpers K. Seien weiter E, E' Zwischenkörper von L/K mit zugehörigen Untergruppen $H = \mathrm{Gal}(L/E)$ und $H' = \mathrm{Gal}(L/E')$ von $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige, dass dann gilt:

(a) $EE' = L^{H \cap H'}$.

(b) $E \cap E' = L^{H''}$, wobei H'' die von H und H' erzeugte Untergruppe von G ist.

Diese beiden Ergebnisse wollen wir benutzen, um Aussagen über Kreisteilungskörper zu beweisen. Sei dafür n eine natürliche Zahl mit Primfaktorzerlegung $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{v_i}$ und weiter ζ eine primitive n-te Einheitswurzel, so dass für $i \in \{1, \ldots, r\}$ durch

$$\zeta_i := \zeta^{\frac{n}{p_i^{v_i}}}$$

eine primitive $p_i^{v_i}$-te Einheitswurzel gegeben ist. Zeige:

(c) $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\zeta_1) \ldots \mathbb{Q}(\zeta_r)$,

(d) $(\mathbb{Q}(\zeta_1) \ldots \mathbb{Q}(\zeta_{i-1})) \cap \mathbb{Q}(\zeta_i) = \mathbb{Q}$.

Abgabe: Bis Freitag, den 21. Dezember 2007, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.