Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

21.12.2007

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 9 (16 Punkte)

Auf diesem Blatt wollen wir die Struktur der Klassengruppe imaginärquadratischer Zahlkörper genauer verstehen lernen. Da wir K in $\mathbb{C}$ einbetten können, entspricht jedem gebrochenen Ideal $\mathfrak{a}$ eines imaginärquadratischen Zahlkörpers K ein vollständiges Gitter in $\mathbb{C}$. Um die Struktur der Klassengruppe Cl_K zu verstehen, genügt es also, die entsprechende Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{M}$ der vollständigen Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$ zu begreifen.
Dafür definieren wir auf $\mathcal{M}$ die Äquivalenzrelation

$$\Gamma \sim \Gamma' \iff \text{ es gibt ein } \gamma \in \mathbb{C}^\times \text{ mit } \Gamma = \gamma\Gamma'.$$

Zeige zunächst:

(a) Fassen wir K vermöge einer fest gewählten Einbettung $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, so ist $J_K \subset \mathcal{M}$, und wir erhalten eine Einbettung $\psi : \mathrm{Cl}_K = J_K/P_K \hookrightarrow \mathcal{M}/\sim$.

Die Äquivalenzklassen in $\mathcal{M}/\sim$ stehen andererseits in Beziehung zur oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Diese Beziehung wollen wir als nächstes studieren. Zeige dafür die folgenden Aussagen:

(b) Durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{az+b}{cz+d}$$

ist eine Gruppenaktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ gegeben.

(c) Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird von den beiden Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt.

(d) Die Menge

$$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2},\ |z| \ge 1,\ \mathrm{Re}(z) \le 0 \text{ für } z \text{ mit } |z| = 1\}$$

ist ein Vertretersystem für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ bezüglich der Aktion aus Aufgabenteil (b). Skizziere die Mengen $T^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{F}, T\mathcal{F}, T^{-1}S\mathcal{F}, S\mathcal{F}, TS\mathcal{F}, STS\mathcal{F}, ST\mathcal{F}, ST^{-1}\mathcal{F}, ST^{-1}S\mathcal{F}$.

Hinweis: Um zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ einen Fundamentalbereich enthält, betrachte für jedes feste $z \in \mathbb{H}$ dasjenige $\gamma . z$ mit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, für das $\mathrm{Im}(\gamma . z)$ maximal wird. Danach überlege, was $z \in \mathcal{F} \wedge \gamma . z \in \mathcal{F}$ für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bedeutet.

(e) Für jedes vollständige Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$ gibt es ein $\gamma_\Gamma \in \mathbb{H}$, so dass Γ zu dem von $\{1, \gamma_\Gamma\}$ erzeugten Gitter äquivalent ist. Die Zuordnung $\Gamma \mapsto \gamma_\Gamma$ induziert eine Bijektion

$$\varphi : \mathcal{M}/\sim \;\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}.$$

Bitte wenden!

Mit den Aufgabenteilen (a) und (e) haben wir gezeigt, dass sich die Klassengruppe Cl_K von K in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ einbetten lässt. Es bleibt noch zu klären, welche Punkte aus dem Vertretersystem $\mathcal{F}$ den Bildpunkten dieser Einbettung entsprechen. Dafür führen wir noch den Begriff der *imaginärquadratischen Irrationalzahl* mit Diskriminante $d := d_K$ ein. Das sind diejenigen $\gamma \in \mathbb{C}$ für die es paarweise teilerfremde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$ und $b^2 - 4ac = d$. Die Menge der imaginärquadratischen Irrationalzahlen mit Diskriminante d bezeichnen wir mit I_d. Ein $\gamma \in I_d$ heißt *reduziert*, wenn γ in $\mathcal{F}$ liegt. Wir wollen zeigen, dass die Menge R_d der reduzierten imaginärquadratischen Irrationalzahlen mit Diskriminante d in Bijektion zur Klassengruppe steht, und dass sich die Elemente von R_d relativ leicht abzählen lassen. Zeige dafür:

(f) Die in Aufgabenteil (b) angegebene Gruppenaktion auf $\mathbb{H}$ lässt die Menge $I_d \cap \mathbb{H}$ invariant.

(g) Die Menge R_d ist ein Vertretersystem für das Bild der Einbettung $\varphi \circ \psi$.

(h) Ein $\gamma \in \mathbb{H}$ ist genau dann in R_d, wenn paarweise teilerfremde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ existieren mit $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$, $b^2 - 4ac = d$ und zusätzlich

$$-a \le b < a,\ a \le c \text{ und } (b < 0 \Longrightarrow a < c).$$

Außerdem gilt für alle $\gamma \in R_d$ die Ungleichung $a^2 \le \frac{|d|}{3}$, weshalb R_d (und damit die Klassenzahl von K) endlich ist.

Insgesamt haben wir uns nun eine recht gute Anleitung dafür erarbeitet, die Klassenzahl eines beliebigen imaginärquadratischen Zahlkörpers zu berechnen. Das wollen wir nun auch einmal in der Praxis üben:

(i) Bestimme die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d \in \{-23, -163, -283, -1003\}$.

Mit dieser Methode lässt sich sogar zeigen, dass die Größe der Klassenzahl eines imaginärquadratischen Zahlkörpers in Abhängigkeit von seiner Diskriminante nach oben nicht beschränkt ist:

(j) Zeige, dass die Klassenzahl eines imaginärquadratischen Zahlkörpers beliebig groß werden kann.

Hinweis: Untersuche, für welche d es zu einem fest vorgegebenen a und $b = 1$ ein gültiges Tripel in R_d gibt.

Wir wünschen allen Lesern und ganz besonders den Lösern ein Frohes Fest und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!

Abgabe: Bis Freitag, den 11. Januar 2008, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.