Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

11.1.2008

## Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 10

**Aufgabe 1 (5 Punkte)**

Zeige für einen beliebigen Körper $K$ die folgenden Aussagen:

(a) Jede nichtarchimedische Bewertung $|\cdot|$ von $K$ setzt sich via

$$|f| = \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\} \text{ für } f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$$

und Multiplikativität zu einer Bewertung des Funktionenkörpers $K(X)$ fort.

(b) Jede nichttriviale Bewertung von $K(X)$, die auf $K$ trivial ist, ist äquivalent zur Bewertung $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $K[X]$ oder zur *Gradbewertung*

$$|\cdot| : K(X) \to \mathbb{R},\ a \mapsto |X|^{\deg(a)},$$

wobei $\deg(\cdot)$ die Exponentialbewertung von $K(X)$ bezeichnet, die durch den Grad eines Polynoms gegeben ist.

**Aufgabe 2 (5 Punkte)**

Bestimme alle Fortsetzungen einer gegebenen Bewertung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wobei $d$ eine quadratfreie ganze Zahl ist.

**Aufgabe 3 (6 Punkte)**

Sei $K$ ein Körper mit nichtarchimedischer Exponentialbewertung $v$, Bewertungsring $\mathcal{O}$, maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ und Wertegruppe $G = v(K^\times)$. Es bezeichne weiterhin $\hat{K}$ die Komplettierung von $K$ bezüglich $v$ mit fortgesetzter Bewertung $\hat{v}$, Bewertungsring $\hat{\mathcal{O}}$, maximalem Ideal $\hat{\mathfrak{p}}$ und Wertegruppe $\hat{G} = \hat{v}(\hat{K}^\times)$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ und $\hat{G} = G$.

(b) Falls $v$ diskret ist, gilt sogar $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{p}}^n \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$ für alle $n \geq 1$.

**Abgabe**: Bis Freitag, den 18. Januar 2008, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.