Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

18.1.2008

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei p eine beliebige Primzahl. Zeige folgende Aussagen über die Topologie der p-adischen Zahlen:

(a) Jede Kreisscheibe $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - x_0|_p < \varepsilon\}$ ist offen und abgeschlossen.

(b) Für jeden Punkt $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt $U_\varepsilon(x_1) = U_\varepsilon(x_0)$; es ist also jeder Punkt von $U_\varepsilon(x_0)$ ein Mittelpunkt.

(c) Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}_p$ sind stetig für den p-adischen Betrag.

(d) $\mathbb{Z}_p$ ist *kompakt*, das heißt jede Folge aus $\mathbb{Z}_p$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{Z}_p$.

(e) $\mathbb{Q}_p$ ist *Hausdorff'sch*, das heißt zu je zwei Punkten $x \neq y \in \mathbb{Q}_p$ gibt es disjunkte offene Mengen U, V mit $x \in U$ und $y \in V$.

(f) $\mathbb{Q}_p$ ist *lokalkompakt*, das heißt jeder Punkt von $\mathbb{Q}_p$ liegt in einer offenen Menge, die ihrerseits in einer kompakten Menge enthalten ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeige, dass der archimedische Betrag auf $\mathbb{R}$ genau eine Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ hat.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeige mit dem Hensel'schen Lemma, dass $f(X) = X^3 - 3X^2 - 2X + 1$ eine Nullstelle in $\mathbb{Q}_5$ hat.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei der Körper K vollständig bezüglich der Bewertung $|\cdot|$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Unter einer *K-Norm* auf V versteht man eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(i) $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \quad \forall v \in V$,

(ii) $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v|| \quad \forall \alpha \in K, v \in V$,

(iii) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \forall v \in V, w \in W.$

Sei nun auf V eine K-Norm $||\cdot||$ gegeben. Damit wird V zu einem topologischen Vektorraum über K, das heißt, dass sowohl die Skalarmultiplikation als auch die Vektoraddition stetig sind.

(a) Zeige, dass für jede Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V der Vektorraumisomorphismus

$$f : K^n \to V,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

ein *Homöomorphismus* ist, dass also sowohl f als auch seine Umkehrabbildung stetig sind.

(b) Folgere daraus, dass V vollständig ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 25. Januar 2008, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.