Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

25.1.2008

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei durch $\log(1+X) \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ die formale Potenzreihe $X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \ldots$ beschrieben. Zeige, dass in $\mathbb{Q}[\![X,Y]\!]$ dann gilt:

$$\log((1+X)(1+Y)) = \log(1+X) + \log(1+Y).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $b_{ij} \in \mathbb{Q}_p$, und für alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_{ij}| < \varepsilon$ falls $\max\{i,j\} \geq n_0$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Für festes j gilt $|\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}| \leq \max_{i\in\mathbb{N}} |b_{ij}|$ und analog $|\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}| \leq \max_{j\in\mathbb{N}} |b_{ij}|$ für festes i.

(b) Die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij})$ und $\sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij})$ konvergieren und stimmen überein.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $K/\mathbb{Q}_p$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper. Zeige folgende Aussagen:

(a) Für $1+x \in 1+\mathfrak{p}$ und $z \in \mathbb{Z}_p$ ist

$$(1+x)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n.$$

(b) Für $x \in K$ mit $v_{\mathfrak{p}}(x) > \frac{e}{p-1}$ konvergiert die Reihe sogar. Hierbei ist e durch $v_{\mathfrak{p}} = e v_p$ gegeben.

(c) $(1+x)^z = \exp(z \log(1+x))$.

(d) $\log(1+x)^z = z \log(1+x)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 1. Februar 2008, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.