Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Hendrik Kasten

1.2.2008

Algebraische Zahlentheorie 1 – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, der bezüglich der nichtarchimedischen Exponentialbewertung v vollständig ist, L/K eine endliche algebraische Körpererweiterung und w die Fortsetzung von v auf L. Bezeichne schließlich λ bzw. κ den Restklassenkörper von L bzw. K. Zeige, dass dann gilt:

$$[L:K] \geq (w(L^\times) : v(K^\times)) \cdot [\lambda : \kappa].$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei K ein lokaler Körper der Charakteristik Null mit der Exponentialbewertung v, Restklassenkörper $\kappa \cong \mathbb{F}_q$ mit $q = p^n$ Primzahlpotenz und dem Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Sei weiter ζ eine n-te Einheitswurzel, $L = K(\zeta)$ mit Restklassenkörper λ und $\mathcal{O}_L$ der Ganzheitsring von L. Zeige vorbereitend zunächst:

(a) Eine endliche Körpererweiterung M/K ist genau dann rein verzweigt, wenn es ein Primelement $\Pi \in M$ mit $M = K(\Pi)$ gibt, welches Nullstelle eines eisensteinschen Polynoms in $K[X]$ ist.

Seien nun für die nächsten drei Teilaufgaben p und n teilerfremd. Zeige, dass dann gilt:

(b) $[L:K] = f$, wobei f die kleinste natürliche Zahl mit $q^f \equiv 1 \bmod (n)$ ist.

(c) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(\lambda/\kappa)$.

(d) $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\zeta]$.

Hinweis: Verwende das Nakayama-Lemma.

Für den Rest der Aufgabe gelte nun $n = p^m$ und $K = \mathbb{Q}_p$. Zeige die folgenden Aussagen:

(e) L/K ist rein verzweigt vom Grad $\varphi(p^m)$.

(f) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$.

(g) $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}_p[\zeta]$.

Hinweis: Verwende das Nakayama-Lemma.

(h) $1 - \zeta$ ist ein Primelement der Norm p.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimme den Grad $[L:K]$, den Restklassengrad, den Verzweigungsindex und den Trägheitskörper für folgende Körpererweiterungen:

(a) $K = \mathbb{Q}_3$ und $L = K(\alpha, \beta)$ mit $\alpha^3 = 3$ und $\beta^2 = 2 - \alpha$,

(b) $K = \mathbb{C}((T))$ und $L = K(\alpha, \beta)$ mit $\alpha^3 = T$ und $\beta^2 = 2 - \alpha$.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Februar 2008, vor Beginn der Übung an den Kasten in Zimmer 307 des Mathematikgebäudes.