Der Führer von $\mathbb{Z}[\vartheta]$

Sei ϑ ganz vom Grad n über $\mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Dann ist der Führer $\mathcal{F}$ als das größte Ideal von $\mathcal{O}_K$ definiert, das in $\mathbb{Z}[\vartheta]$ liegt, also

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid \alpha \cdot \mathcal{O}_K \subset \mathbb{Z}[\vartheta]\} \subset \mathbb{Z}[\vartheta].$$

Offensichtlich können wir dafür auch schreiben

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid \alpha \cdot \vartheta' \in \mathbb{Z}[\vartheta] \text{ für alle } \vartheta' \text{ aus einer Ganzheitsbasis von } \mathcal{O}_K \}.$$

Wenn wir die Basiswechselmatrix zwischen $\{1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}\}$ und der Ganzheitsbasis $\{\vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_n\}$ von oben mit M bezeichnen, dann gilt wegen $(\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\vartheta]) = \det(M)$

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid \alpha \cdot \vartheta^i \in \mathbb{Z}[\vartheta] \forall i \text{ und } \alpha \in (\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\vartheta]) \cdot \mathbb{Z}[\vartheta]\} = (\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\vartheta]) \cdot \mathcal{O}_K.$$

Bemerkung: Das analoge Ergebnis gilt natürlich auch für andere Hauptidealringe als $\mathbb{Z}$ aber eben nicht im allgemeinen Fall, weil dann bei der Berechnung der Basiswechseldeterminante nicht der Elementarteilersatz zur Verfügung steht.

Beispiel

Ein einfaches Beispiel ist $\vartheta = \sqrt{5}$. Wir haben dann $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Hier gilt $\mathcal{F} = 2 \cdot \mathcal{O}_K$.
Bemerkung: Der Führer ist als Führer von $\mathbb{Z}[\vartheta]$ definiert und nicht als Führer des Körpers K. So gilt sicherlich $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, aber

$$2 \cdot \mathcal{O}_K = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}[\sqrt{5}]} \neq \mathcal{F}_{\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]} = \mathcal{O}_K.$$