Dies ist der Beweis der Multiplikativität der Bewertung $|\cdot|$ auf $K(X)$ aus Aufgabe 1, Teilaufgabe (a) von Blatt 10. Zu zeigen ist, dass für alle $f, g \in K[X]$ gilt:

$$|fg| = |f| \cdot |g|.$$

Dafür zeigen wir zunächst die folgende:

Behauptung: $|f| = |g| = 1 \Longrightarrow |fg| = 1$.

Die Voraussetzung ist hierbei offensichtlich äquivalent zu $f, g \in \mathcal{O}[X] \setminus \mathfrak{p}[X]$, wobei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ das Bewertungsideal von K ist.

Beweis. Wenn jetzt $|fg| \neq 1$ wäre, also $fg \notin \mathcal{O}[X] \setminus \mathfrak{p}[X]$, so wäre es automatisch in $\mathfrak{p}[X]$, da ja $\mathcal{O}[X]$ ein Ring ist. Nun ist aber $\mathfrak{p}[X]$ wegen

$$\mathcal{O}[X]/\mathfrak{p}[X] \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}[X]$$

ein Primideal, so dass mit fg auch f oder g darin liegen muss. Das hatten wir aber gerade ausgeschlossen, so dass die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Wir wollen sie sogleich anwenden. Offenbar gilt:

$$\left| \frac{f}{|f|} \right| = \max_i \left| \frac{a_i}{|f|} \right| = \frac{|f|}{|f|} = 1$$

und genauso

$$\left| \frac{g}{|g|} \right| = 1,$$

so dass mit der Behauptung folgt:

$$1 = \left| \frac{f}{|f|} \cdot \frac{g}{|g|} \right| = \frac{|fg|}{|f| \cdot |g|}$$

und damit die gewünschte Multiplikativität.