Holiday Sheet
– with solutions –

Exercise 1:

(a) Determine $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ for the following functions f and points x_0:

$$\text{(i)}\quad f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}\ \text{for}\ x>2,\quad x_0=2,\qquad\qquad \text{(ii)}\quad f(x)=\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\ \text{for}\ x>1,\quad x_0=1.$$

(b) Determine all points $x\in\mathbb{R}$, at which the following function is continuous:

$$g(x)=\begin{cases}2(x+1)^2, & x<-1,\\ -x & x\in[-1,1],\\ x^2-2x, & x>1.\end{cases}$$

Solution 1:

(a) (i) Für $x>2$ lässt sich f umschreiben zu

$$f(x)=\frac{1}{x+2}.$$

Daher gilt $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{4}$.

(ii) Es gelten die beiden Formeln

$$\begin{aligned} a^4-b^4&=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)\\ a^3-b^3&=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\end{aligned}$$

Diese wenden wir an, um den Ausdruck für f umzuschreiben:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(x^{3/4}+x^{2/4}+x^{1/4}+1\right)\left(x^{2/3}+x^{1/3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(x^{3/4}+x^{2/4}+x^{1/4}+1\right)\left(x^{2/3}+x^{1/3}+1\right)}\\ &=\frac{(x-1)\left(x^{2/3}+x^{1/3}+1\right)}{(x-1)\left(x^{3/4}+x^{2/4}+x^{1/4}+1\right)}\\ &=\frac{x^{2/3}+x^{1/3}+1}{x^{3/4}+x^{2/4}+x^{1/4}+1}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1+1+1}{1+1+1+1}=\frac{3}{4}.$$

(b) Die stückweisen Teilfunktionen von g sind Polynome und daher stetig. Damit kann g höchstens in den "Nahtstellen" $\{-1,1\}$ unstetig sein.

Wir betrachten zunächst die Stelle $x=-1$. Dazu definieren wir die Folge

$$x_n=-1-\frac{1}{n}\to -1\qquad (n\to\infty)$$

und berechnen

$$\lim_{n\to\infty} g\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=0\neq 1=f\left(-1\right).$$

Daraus folgt, dass g in $x=-1$ nicht stetig ist. Als nächstes untersuchen wir die Stelle $x=1$. Es gilt

$$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-2x)=-1=g(1).$$

Also ist g in $x=1$ stetig und damit insgesamt stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Exercise 2:
Consider the recursively defined sequence

$$a_1 = b\,, \qquad a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1}\,,\ k \in \mathbb{N}$$

for two initial values $b = -\frac{1}{4}$, and $b = \frac{1}{4}$.

(a) Assume that for fixed b the sequence (a_k) converges. What are the candidates for the limit?

(b) Determine for which initial value $b = -\frac{1}{4}$ or $b = \frac{1}{4}$ the sequence is monotone.

(c) Determine for which initial value the sequence is bounded.

(d) Justify, for both initial values $b = -\frac{1}{4}$ or $b = \frac{1}{4}$, whether the sequence is converging or not. In case of convergence determine the limit.

Solution 2:

(a) Wenn die Folge $(a_k)_k$ konvergiert, so existiert ein Grenzwert a und man kann den Limes auf die Rekursionsformel anwenden:

$$\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k = a = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{2a_k - 1} = \frac{|a|}{2a-1}$$

Also müssen mögliche Grenzwerte die Formel $2a^2 - a = |a|$ erfüllen.

Wir betrachten zunächst $a \leq 0$: Dann ist

$$2a^2 - a = -a \Longleftrightarrow a = 0.$$

Für $a > 0$ erhalten wir:

$$2a^2 - a = a \Longleftrightarrow 2a(a-1) = 0.$$

Als mögliche Grenzwerte kommen hier 0 und 1 in Frage. Das Gleiche gilt für die Folge $(b_k)_k$.

(b) (i) Wir betrachten zunächst $(a_k)_k$. Für $a_1 = -\frac{1}{4}$ erhalten wir $a_2 = -\frac{1}{6}$, $a_3 = -\frac{1}{8}$. Wir behaupten, dass $a_k < 0$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ und beweisen dies mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $a_1 = -\frac{1}{4} < 0$.

Induktionsschritt $k \curvearrowright k+1$: Wir behaupten, es gelte $a_k < 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (*Induktionsvoraussetzung*). Zu zeigen ist: $a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1} < 0$. Das ist leicht einzusehen, da der Zähler immer positiv ist und der Nenner für negatives a_k negativ ist.

Dieses Ergebnis nutzen wir, um Monotonie zu zeigen: Für die Differenz $a_{k+1} - a_k$ erhalten wir dann wegen $|a_k| = -a_k$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \frac{|a_k|}{2a_k - 1} - a_k = \frac{-a_k - 2a_k^2 + a_k}{2a_k - 1} \\ &= -2\frac{a_k^2}{2a_k - 1} = -2|a_k|\frac{|a_k|}{2a_k - 1} > 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(a_k)_k$ streng monoton steigend.

Für die Folge $(b_k)_k$ haben wir $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = -\frac{1}{2}$ und $b_3 = -\frac{1}{4}$, sie ist also nicht monoton.

(ii) Wie in (i) gezeigt, sind für $(a_k)_k$ die Folgenglieder negativ, gleichzeitig aber streng monoton wachsend. Also ist $a_1 \leq a_k < 0$ und damit insbesondere $|a_k| \leq -a_1$.
Somit ist die Folge $(a_k)_k$ beschränkt.

Für die Folge $(b_k)_k$ gilt $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_3 = -\frac{1}{4}$. Wir behaupten, für $k \geq 2$ ist dann

$$b_{k+1} = \frac{|b_k|}{2b_k - 1} < 0,$$

was analog gezeigt werden kann wie in (i) (mit vollständiger Induktion), also hier nicht erneut aufgeführt werden muss.

Außerdem folgt wie in $(*)$, dass $(b_k)_k$ für $k \geq 2$ monoton wachsend ist. Also gilt hier

$$-\frac{1}{2} \leq b_k \leq \frac{1}{4},$$

sodass insbesondere $|b_k| \leq \frac{1}{2}$, d.h. die Folge ist beschränkt.

(iii) Für $(a_k)_k$ sind die Voraussetzungen des Monotoniekriteriums erfüllt. Folglich konvergiert $(a_k)_k$. Da $a_k < 0$, kann der Grenzwert nur $a = 0$ sein.

Für $(b_k)_k$ ist die Folge ab dem zweiten Folgenglied monoton, somit konvergiert $(b_k)_{k\geq 2}$ nach dem Monotoniekriterium, und damit auch die gesamte Folge. Auch hier ist der Grenzwert 0.

Bemerkung: Man kann auch argumentieren, dass die Folge mit dem Startwert $\frac{1}{4}$ beim zweiten Folgenglied $-\frac{1}{4}$ erreicht und ab dort mit der ersten Folge übereinstimmt, die konvergiert.

Exercise 3:
Consider the polynomial p and the function f given by

$$p(x) \;=\; x^5 - 8x^2 + 4\,, \quad f(x) = |p(x)|\;, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Justify that f has a minimum point $x_- \in [-2, 2]$ with minimum value $f(x_-) \leq 4$.

(b) Show that $f(x) \geq 4$ for all $|x| \geq 2$.

(c) Why does f have a minimum in $\mathbb{R}$?

Solution 3:

(a) Das Intervall $[-2, 2]$ ist kompakt. Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen (Betragsfunktion und Polynom) wieder stetig. Sie ist also insbesondere stetig auf dem kompakten Intervall $[-2, 2]$. Daher existieren Maximum und Minimum nach Satz 3.22 dort.

Für $x = 2$ ist $f(x) = 4$. Also muss das Minimum kleiner oder gleich 4 sein.

(b) Das Polynom p lässt sich umschreiben zu $p(x) = x^5 - 8x^2 + 4 = x^2(x^3 - 8) + 4$, also ist für $x \geq 2$

$$|f(x)| = |x^2(x^3 - 8) + 4| \geq 4,$$

da sowohl x^2 als auch x^3-8 positiv sind. Für $x \leq -2$ gilt mit der Dreiecksungleichung (bzw. der umgekehrten Dreiecksungleichung)

$$|f(x)| = |x^2(x^3 - 8) + 4| = |x^2(x^3 - 8) - (-4)| \geq |x^2(x^3 - 8)| - |-4| = |x^2(x^3 - 8)| - 4.$$

x^2 ist größer gleich 4 und $(x^3 - 8) \leq -8 - 8 = -16 \Rightarrow -(x^3 - 8) \geq 16$. Also ist $|x^2(x^3 - 8)| \geq 4 \cdot 16$. Insgesamt folgt

$$|f(x)| \geq 4 \cdot 16 - 4 = 4 \cdot 15 = 60 \geq 4.$$

(c) Wir haben bereits in Teil (a) gezeigt, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$ ist und sie innerhalb des Intervalls $[-2, 2]$ ein Minimum annimmt. Sie ist zudem für $|x| \geq 2$ (d.h. außerhalb des Intervalls $[-2, 2]$) immer größer oder gleich 4. Sie muss demnach ein Minimum auf $\mathbb{R}$ annehmen.

Exercise 4:
Show that for any positive constants a, b, c the equation

$$\frac{(a + b)x + a - b}{x^2 - 1} + \frac{c}{x - 2} = 1$$

has solutions in the intervals $[-1, 1]$ and $[1, 2]$, respectively.

Solution 4:
Es gilt

$$\frac{(a + b)x + a - b}{x^2 - 1} + \frac{c}{x - 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}.$$

Also folgt

$$\lim_{x\searrow -1}\left(\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}+\frac{c}{x-2}\right)=+\infty$$

es gibt also ein x_1 nahe -1, für das der Term positiv ist, und wegen

$$\lim_{x\nearrow 1}\left(\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}+\frac{c}{x-2}\right)=-\infty.$$

somit auch ein x_2 nahe 1, für das der Term negativ ist. Nach dem Zwischenwertsatz existiert mindestens eine Stelle im Intervall $[x_1,x_2]\subseteq(-1,1)$, die die Gleichung erfüllt, da die Funktion in diesem Intervall definiert und stetig ist. Analog folgt die Existenz einer Lösung im Intervall $(1,2)$.

Exercise 5:
For which $x \in \mathbb{R}$ does the following power series converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{n^2+2}{n^3+n} x^{3n}.$$

Solution 5:
Variante 1: Für $x = 0$ konvergiert die Reihe. Für $x \neq 0$ ist $a_n := (-2)^n \frac{n^2+2}{n^3+n} x^{3n} \neq 0$, und wir können das Quotientenkriterium anwenden:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1} \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+(n+1)} x^{3n+3}}{(-2)^n \frac{n^2+2}{n^3+n} x^{3n}}\right| = 2\frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \cdot \frac{n^3+n}{n^2+2} |x|^3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2|x|^3 \overset{!}{<} 1$$

$\Leftrightarrow |x|^3 < \frac{1}{2}$ Also haben wir Konvergenz für $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ und Divergenz für $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Variante 2: Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^n \frac{n^2+2}{n^3+n} |x|^{3n}} = 2\sqrt[n]{\frac{n^2+2}{n(n^2+1)}} \cdot |x|^3 = 2|x|^3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{n^2+1}} = 2|x|^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2+1}}}_{1 \leftarrow \sqrt[n]{1} < \cdot < \sqrt[n]{2} \to 1}$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2|x|^3 \cdot 1 \cdot 1 \overset{!}{<} 1.$$

Damit ergibt sich wie in Variante 1 der Konvergenzradius $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Randwerte: Nun muss (bei beiden Varianten) noch das Verhalten an den Rändern untersucht werden:

- $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+n}$ konvergiert nach Leibniz, wenn $\frac{n^2+2}{n^3+n}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.
  Die Nullfolgeneigenschaft ist klar, weil

  $$\left|\frac{n^2+2}{n^3+n}\right| \leq \frac{n^2+n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$$

  für $n \geq 2$, d.h. die Nullfolge $2/n$ ist eine Majorante.
  Nachweis der Monotonie:

  $$\begin{aligned}\frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} - \frac{n^2+2}{n^3+n} &= \frac{(n^3+n)(n^2+2n+3)-(n^2+2)(n^3+3n^2+4n+2)}{((n+1)^3+n+1)(n^3+n)} \\ &= \frac{-n^4-2n^3-6n^2-5n-4}{((n+1)^3+n+1)(n^3+n)} < 0,\end{aligned}$$

  also fällt die Folge monoton. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert sie also.

- $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{n^2+2}{n^3+n} (-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{3n}\right)$ divergiert nach dem Majorantenkriterium, da

  $$(-2)^n \frac{n^2+2}{n^3+n} (-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{3n} = \frac{n^2+2}{n^3+n} \geq \frac{n^2+1}{n^3+n} = \frac{(n^2+1)}{n(n^2+1)} = \frac{1}{n}$$

  und die harmonische Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ gegen unendlich strebt.

Die zu untersuchende Reihe konvergiert also genau für $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

Exercise 6:
Find all solutions $z \in \mathbb{C}$ of the following equation

$$3^{-2z} + 1 = 2\cosh(z \ln 3).$$

Solution 6:
With $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ we can write the equation as

$$3^{-2z} + 1 = 3^z + 3^{-z}.$$

We substitute $u = 3^z$ and then multiply both sides of the equation by u^2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} + 1 &= u + \frac{1}{u}, \\ 1 + u^2 &= u^3 + u. \end{aligned}$$

This is equivalent to

$$\begin{aligned} 1 + u^2 &= (u^2 + 1)\,u \\ (u^2 + 1)(u - 1) &= 0 \end{aligned}$$

and has solutions $u_1 = 1$, $u_2 = i$ and $u_3 = -i$.
Now we need to find all z with $3^z \in \{1, i, -i\}$. We can write this as

$$e^{z \ln 3} = e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Since we know that

$$e^z = e^w \iff w = z + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

the equation is solved for

$$z \ln 3 = i\varphi + 2\pi i\, k, \qquad \varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Due to injectivity of the exponential function on $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$ those are all possible solutions. Thus, we have

$$z = \frac{i\pi}{2\ln 3}(4k + d), \qquad d \in \{0, 1, -1\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercise 7:
Determine all solutions $z \in \mathbb{C}$ of the equation

$$\left(e^{\mathrm{i}z} - 3\right)\cos(z) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}z} = 0.$$

Solution 7: We use the identity $\cos(z) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right)$ and multipliy both sides of the equation by $2\,e^{\mathrm{i}z}$ to obtain

$$\left(e^{\mathrm{i}z} - 3\right)\left(e^{2\mathrm{i}z} + 1\right) + 3\,e^{\mathrm{i}z} + 1 = 0.$$

This is equivalent to

$$e^{3\mathrm{i}z} - 3\,e^{2\mathrm{i}z} + 4\,e^{\mathrm{i}z} - 2 = 0.$$

We subtitute $w = e^{\mathrm{i}z}$ and obtain the cubic equation

$$w^3 - 3\,w^2 + 4w - 2 = 0$$

with the obvious solution $w = 1$. Using this, we rewrite the equation as

$$0 = (w-1)\,(w^2 - 2\,w + 2) = (w-1)\,\left[(w-1)^2 + 1\right] = (w-1)\,(w-1-\mathrm{i})\,(w-1+\mathrm{i}).$$

After resubstituting, we thus have to consider the 3 cases

$$e^{iz} = 1 = e^0\,, \qquad e^{iz} = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = e^{\ln(\sqrt{2}+i\pi/4)}\,, \qquad e^{iz} = 1 - i = e^{\ln(\sqrt{2})-i\pi/4}.$$

Using that

$$e^z = e^w \iff w = z + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

we obtain

$$z = 2\pi k \qquad \text{or} \qquad z = -i\,\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad \text{or} \qquad z = -i\,\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,,$$

where $k \in \mathbb{Z}$.

Exercise 8:
The function $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$, where $f(x) = \frac{1}{1-2x}$, can be expanded into a power series centered at $x_0 = 2$.

(a) Determine the coefficients of this power series.

(b) For which $x \in \mathbb{R}$ does this series converge?

Solution 8:
Die ersten beiden Aufgabenteile können auf zwei unterschiedlichen Wegen beantwortet werden:

(1) Eine Möglichkeit ist, den Term $\frac{1}{1-2x}$ auf die Summenformel einer konvergenten geometrischen Reihe umzuformen.

(a) Um die Potenzreihe zu erhalten, müssen wir den Term auf die Form $\frac{1}{1-q}$ bringen:

$$\frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2(x-2+2)} = \frac{1}{-3-2(x-2)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{2}{3}(x-2)\right)}_{=:q}}$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n (x-2)^n$$

Die Koeffizienten der Potenzreihe sind damit $a_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = (-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

(b) Die Reihe ist eine geometrische Reihe $\sum q^n$ für $q = -\frac{2}{3}(x-2)$. Damit konvergiert die Reihe genau für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$. Wir erhalten Konvergenz für

$$\left|-\frac{2}{3}(x-2)\right| = \frac{2}{3}|x-2| \overset{!}{<} 1\,,$$

also für $|x-2| < \frac{3}{2}$. Damit ist der Konvergenzradius $\frac{3}{2}$ und die Reihe divergiert an den Rändern, also ist die Reihe konvergent für $x \in (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

(2) Die Potenzreihe kann auch über einen allgemeinen Potenzreihenansatz und anschließendem Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

(a) Wir setzen den Term einer allgemeinen Potenzreihe gleich und bestimmen die erforderlichen Bedingungen für die Koeffizienten. Den Ansatz

$$\frac{1}{1-2x} \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

multiplizieren wir auf beiden Seiten mit dem Nenner $1 - 2x = -3 - 2(x-2)$:

$$\begin{aligned}
1 &= (-3-2(x-2))\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^{n+1} \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-2)^n \quad \text{(Indexverschiebung)} \\
&= -3a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n + 2a_{n-1})(x-2)^n.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Gleichungen für a_n:

$$a_0 = -\frac{1}{3}, \qquad 3a_n + 2a_{n-1} = 0\,, \text{ bzw. } a_n = -\frac{2}{3}a_{n-1}\,.$$

Induktiv sind damit die Koeffizienten der Potenzreihe $a_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ gegeben. Eingesetzt in den Ansatz erhalten wir die Potenzreihe zu f:

$$f(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n (x-2)^n$$

(b) Das Wurzelkriterium liefert die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n (x-2)^n\right|} = \frac{2}{3}|x-2| \overset{!}{<} 1$$

und wir erhalten $|x-2| < \frac{3}{2}$, also ist der Konvergenzradius $\frac{3}{2}$. Die Reihe konvergiert somit zumindest für $x \in (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$. Es bleibt noch die Randpunkte bzgl. der Konvergenz zu untersuchen: Doch da für $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{7}{2}$ der Term $(x-2) = \mp\frac{3}{2}$ ist, und damit $(-\frac{2}{3}(x-2))^n = (\pm 1)^n$ für $n \to \infty$ nicht gegen 0 geht, die Summanden also keine Nullfolgen sind, können die beiden Reihen nicht konvergieren. Die Potenzreihe konvergiert damit nur für $x \in (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

Exercise 9:
Consider the recursively given sequence

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 4)$$

for the initial values

$$\text{a)}\ \ a_0 = 2, \qquad \text{b)}\ \ a_0 = 4.$$

Decide whether the sequences are monotone and convergent. In case of convergence, determine the limit.

Solution 9:
Wir stellen zuerst fest, dass $a_n > 0$ ist für jedes n, also ist auch $a_n + a_{n-1} > 0$. Anwendung von

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left[(a_n^2 + 4) - (a_{n-1}^2 + 4)\right] = \frac{1}{5}(a_n - a_{n-1})(\underbrace{a_n + a_{n-1}}_{>0})$$

ergibt dann für die Vorzeichen (sgn)

$$\operatorname{sgn}(a_{n+1} - a_n) = \operatorname{sgn}(a_n - a_{n-1})\,,$$

d.h.

(i) Ist $a_1 < a_0$, so ist auch $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Vollständige Induktion!) und die Folge ist streng monoton fallend.

(ii) Gilt dagegen $a_1 > a_0$, so ist auch $a_{n+1} > a_n$ für alle n, entsprechend ist (a_n) dann monoton wachsend.

(iii) Ist $a_1 = a_0$, so bleibt $a_{n+1} = a_n$ und die Folge ist konstant.

(a) Es ist

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{1}{5}(2^2 + 4) = \frac{8}{5} < 2,$$

d.h. (i) ist der Fall, also ist (a_n) streng monoton fallend und beschränkt von unten durch 0. Nach dem Monotoniekriterium schließen wir, dass (a_n) konvergiert. Um den Grenzwert zu bestimmen, stellen wir die Fixpunktgleichung auf:

$$a = \frac{1}{5}(a^2 + 4) \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{4},$$

d.h. $|a - \frac{5}{2}| = \frac{3}{2}$ bzw. $a - \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2}$. Mögliche Kandidaten für Grenzwerte sind demnach $a_1 = 1$ und $a_2 = 4$. Da (a_n) monoton fällt, muss der Grenzwert 1 sein.

(b) Ist $a_0 = 4$, so ist $a_1 = a_0 = 4$ (Fall (iii)). Die Folge ist konstant und konvergent mit Grenzwert 4.