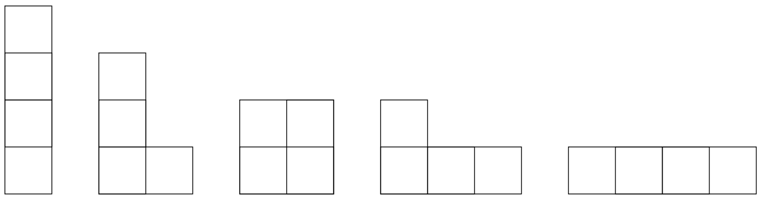
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Fabian Januszewski

Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Vorlesung im Wintersemester 2016



Die Gesamtheit der Young-Diagramme für $n = 4$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Das 14-15-Puzzle

Eine *Darstellung* einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho: \quad G \to \mathrm{Aut}_k(V),$$

von G in die Automorphismengruppe eines k-Vektorraumes V. Eine Darstellung ist also nichts anderes als eine k-lineare Aktion von G auf einem Vektorraum V. Wir nennen $\dim_k(V)$ die *Dimension* der Darstellung.

In der Vorlesung werden wir uns auf den fundamentalen Fall einer endlichen Gruppe G konzentrieren. Hier stellt sich heraus, daß (genau dann) wenn die Charakteristik von k die Gruppenordnung nicht teilt, jede Darstellung ρ von G in eindeutiger Weise als direkte Summe irreduzibler Darstellung geschrieben werden kann.

Eines der Ziele der Vorlesung wird es sein, die Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n zu verstehen. Insbesondere werden wir hier die irreduziblen Darstellungen explizit beschreiben.

Aus der Linearen Algebra kennen wir bereits eine prominente irreduzible Darstellung der S_n: Ordnen wir einer Permutation σ die Zahl $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ zu, wenn σ eine *gerade Permutation* ist, und die Zahl $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, wenn σ *ungerade* ist, dann erhalten wir eine eindimensionale Darstellung

$$\mathrm{sgn}: \quad S_n \to \mathbb{C}^\times = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^1)$$

der symmetrischen Gruppe S_n. Wir werden in der Vorlesung lernen, daß S_n (bis auf Isomorphie) lediglich zwei eindimensionale Darstellungen besitzt: sgn und die triviale Darstellung

$$1: \quad S_n \to \mathbb{C}^\times, \quad \sigma \mapsto 1.$$

Dies spiegelt wider, daß der Kommutator $A_n \subseteq S_n$ der S_n von Index 2 ist.

Bereits die eindimensionalen Darstellungen haben Anwendungen: Mit Hilfe von sgn kann man zeigen, daß das 14-15-Puzzle unlösbar ist. Die Anwendungen der Darstellungstheorie der S_n sind jedoch noch viel weitreichender.

Im Allgemeinen werden die irreduziblen Darstellungen der S_n durch *Young-Diagramme* parametrisiert. Ein Young-Diagramm entspricht einer Partition

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$$

von n. Young-Diagramme werden sich als sehr nützlich erweisen.

Beispielsweise werden wir die *Henkellängen-Formel* kennenlernen, welche es uns erlaubt, aus einem Young-Diagramm die Dimension der zugehörigen irreduziblen Darstellung abzulesen.

Im mathematischen Alltag treten Darstellungen allgemeinerer Gruppen an vielen Stellen in natürlicher Weise auf: in der Gruppentheorie, insbesondere bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, via Monodromie-Darstellungen der Fundamentalgruppe in der Topologie und Geometrie, in der geometrischen Invarianten-Theorie, in der Zahlentheorie vom Dirichlet'schen Primzahlsatz über Andrew Wiles' Beweis der Fermat'schen Vermutung bis zum Langlands-Programm, in der (nichtkommutativen) harmonischen Analysis, in der Kombinatorik, in der Stochastik, in der Quantenmechanik, Symmetriebrechung in der Physik...

Voraussetzung: Die Vorlesung *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*.
Termin: Donnerstags 11:30-13:00 im SR 2.58.