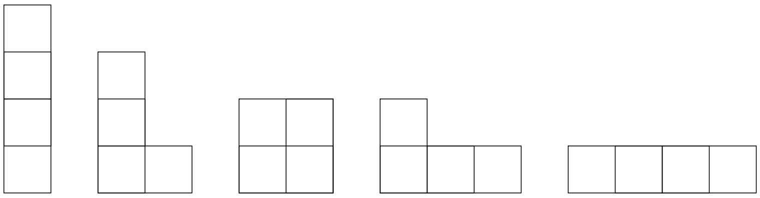
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski

# Darstellungstheorie endlicher Gruppen

**Vorlesung im Sommersemester 2015**



Die Gesamtheit der Young-Diagramme für $n = 4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

Das 14-15-Puzzle

Eine *Darstellung* einer Gruppe $G$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \quad G \to \mathrm{Aut}_k(V),$$

von $G$ in die Automorphismengruppe eines $k$-Vektorraumes $V$. Eine Darstellung ist also nichts anderes als eine $k$-lineare Aktion von $G$ auf einem Vektorraum $V$. Wir nennen $\dim_k(V)$ die *Dimension* der Darstellung.

In der Vorlesung werden wir uns auf den fundamentalen Fall einer endlichen Gruppe $G$ konzentrieren. Hier stellt sich heraus, daß (genau dann) wenn die Charakteristik von $k$ die Gruppenordnung nicht teilt, jede Darstellung $\rho$ von $G$ in eindeutiger Weise als direkte Summe irreduzibler Darstellung geschrieben werden kann.

Eines der Ziele der Vorlesung wird es sein, die Darstellungen der symmetrischen Gruppe $S_n$ zu verstehen. Insbesondere werden wir hier die irreduziblen Darstellungen explizit beschreiben.

Aus der Linearen Algebra kennen wir bereits eine prominente irreduzible Darstellung der $S_n$: Ordnen wir einer Permutation $\sigma$ die Zahl $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ zu, wenn $\sigma$ eine *gerade Permutation* ist, und die Zahl $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, wenn $\sigma$ *ungerade* ist, dann erhalten wir eine eindimensionale Darstellung

$$\mathrm{sgn} : \quad S_n \to \mathbb{C}^\times = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^1)$$

der symmetrischen Gruppe $S_n$. Wir werden in der Vorlesung lernen, daß $S_n$ (bis auf Isomorphie) lediglich zwei eindimensionale Darstellungen besitzt: sgn und die triviale Darstellung

$$1 : \quad S_n \to \mathbb{C}^\times, \quad \sigma \mapsto 1.$$

Dies spiegelt wider, daß der Kommutator $A_n \subseteq S_n$ der $S_n$ von Index 2 ist.

Bereits die eindimensionalen Darstellungen haben Anwendungen: Mit Hilfe von sgn kann man zeigen, daß das 14-15-Puzzle unlösbar ist. Die Anwendungen der Darstellungstheorie der $S_n$ sind jedoch noch viel weitreichender.

Im Allgemeinen werden die irreduziblen Darstellungen der $S_n$ durch *Young-Diagramme* parametrisiert. Ein Young-Diagramm entspricht einer Partition

$$n \;=\; n_1 + n_2 + \cdots + n_l$$

von $n$. Young-Diagramme werden sich als sehr nützlich erweisen.

Beispielsweise werden wir die *Henkellängen-Formel* kennenlernen, welche es uns erlaubt, aus einem Young-Diagramm die Dimension der zugehörigen irreduziblen Darstellung abzulesen.

Im mathematischen Alltag treten Darstellungen allgemeinerer Gruppen an vielen Stellen in natürlicher Weise auf: in der Gruppentheorie, insbesondere bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, via Monodromie-Darstellungen der Fundamentalgruppe in der Topologie und Geometrie, in der geometrischen Invarianten-Theorie, in der Zahlentheorie vom Dirichlet'schen Primzahlsatz über Andrew Wiles' Beweis der Fermat'schen Vermutung bis zum Langlands-Programm, in der (nichtkommutativen) harmonischen Analysis, in der Kombinatorik, in der Stochastik, in der Quantenmechanik, Symmetriebrechung in der Physik...

**Voraussetzung:** Die Vorlesung *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*.
**Termin:** Mittwochs 11:30-13:00 im 1C-01 / SR 3.60.