Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dr. Jingwei Zhao

13.05.2015

Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{H}$ die folgende Untermenge

$$\mathbb{H} := \{\begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}\}$$

von $\mathbb{C}^{2\times 2}$. $\mathbb{H}$ ist mit den von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auf $\mathbb{H}$ eingeschränkten Verknüpfungen ein Schiefkörper. Weiter seien

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

und $Q_8 := \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$, die wir *Quaternionengruppe* nennen.

(a) Zeigen Sie: $Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathbf{i} \pm \mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von Q_8 ein Normalteiler ist.

(c) Bestimmen Sie das Zentrum Z von Q_8.

(d) Zeigen Sie: $Q_8/Z \cong V_4$, wobei V_4 die Kleinsche Vierergruppe bezeichnet.

(e) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen in Q_8.

Aufgabe 2

Die Inklusion $Q_8 \subset \mathbb{H} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ induziert eine zweidimensionale komplexe Darstellung (ρ, V_ρ) von Q_8. Zeigen Sie:

(a) ρ ist irreduzibel.

(b) ρ ist treu, d. h. $\mathrm{Kern}(\rho)$ ist trivial.

(c) ρ ist selbstdual.

(d) $V_\rho \otimes V_\rho$ enthält die triviale Darstellung.

Zerlegen Sie $V_\rho \otimes V_\rho$ in irreduzible Komponenten.

Abgabe: Am Freitag, den 22.05.2015, in der Übung an die Übungsleiterin.