

## Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Übungsblatt 3

Auf diesem Übungsblatt sei  $k$  ein beliebiger Körper der Charakteristik 0,  $G$  sei eine beliebige endliche Gruppe und alle Darstellungen seien definiert über  $k$ .

### Aufgabe 1

Seien  $(\rho, V)$  eine Darstellung von  $G$  mit dem Charakter  $\chi_\rho$ ,  $H$  eine Untergruppe von  $G$  und  $(\tau, W)$  eine Darstellung von  $H$  mit dem Charakter  $\chi_\tau$ . Wir definieren

$$\psi_\tau(g) := \frac{1}{\#H} \sum_{h \in G, h^{-1}gh \in H} \chi_\tau(h^{-1}gh).$$

Zeigen Sie:

(a)  $\chi_{\text{Res}_H^G \rho} = \chi_\rho|_H$ .

(b)  $\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \psi_\tau(g) \chi_\rho(g) = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi_\tau(h) \chi_{\text{Res}_H^G \rho}(h)$ .

(c) Aus (b) folgt  $\psi_\tau = \chi_{\text{Ind}_H^G \tau}$ .

### Aufgabe 2

Sei  $H$  jetzt ein Normalteiler von  $G$ . Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1:

(a)

$$\chi_{\text{Ind}_H^G 1}(g) = \begin{cases} (G : H), & \text{falls } g \in H \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b)

$$\chi_{k[G]}(g) = \begin{cases} \#G, & \text{falls } g = e_G \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Beweisen Sie (b) ohne Hilfe von Aufgabe 1.

Bitte wenden!

### Aufgabe 3

In dieser Aufgabe geht es um Darstellungen der symmetrischen Gruppe  $S_4$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gibt genau zwei eindimensionale Darstellungen von  $S_4$ .
- (b) Die Kleinsche Vierergruppe  $V_4$  ist ein Normalteiler von  $S_4$  und es gilt  $S_4/V_4 \cong S_3$ .  
Folgern Sie daraus, dass es eine zweidimensionale irreduzible Darstellung von  $S_4$  gibt.
- (c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass alle anderen irreduziblen Darstellungen von  $S_4$  von Dimension 3 sind. Es gibt genau zwei irreduzible dreidimensionale Darstellungen.
- (d) Die Permutationsdarstellung von  $S_4$  auf  $k^4$  enthält eine invariante Gerade  $\mathfrak{g}$ .
- (e)  $k^4/\mathfrak{g}$  ist irreduzibel.  
*Hinweis:* Bestimmen Sie den Charakter von  $k^4/\mathfrak{g}$ .
- (f)  $k^4/\mathfrak{g} \otimes \text{sgn}$  ist die andere irreduzible Darstellung der Dimension 3.

**Abgabe:** Am Freitag, den 05.06.2015, in der Übung an die Übungsleiterin.