

Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Es bezeichne ρ die irreduzible zweidimensionale Darstellung von S_3 über einem Körper k mit $\text{char}(k) = 0$.

- Zerlegen Sie $\text{Ind}_{S_3}^{S_4} \rho$ in irreduzible Darstellungen.
- Zerlegen Sie für jede irreduzible Darstellung τ der S_4 die Darstellung $\text{Res}_{S_3}^{S_4} \tau$ in irreduzible Darstellungen.

Aufgabe 2

Es sei G eine endliche Gruppe, (ρ, V) eine irreduzible Darstellung von G über \mathbb{C} und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Es gelte

$$\text{Res}_N^G V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

mit irreduziblen Darstellungen $(\tau_1, W_1), \dots, (\tau_n, W_n)$ von N . Da N ein Normalteiler ist, operiert G durch Konjugation auf den Konjugationsklassen von N und damit auch auf den Klassenfunktionen, insbesondere den Charakteren. Konkret setzen wir für eine Klassenfunktion χ auf N und $g \in G$:

$$\chi^g(n) := \chi(gng^{-1}), \quad n \in N.$$

Dies ist eine Rechtsoperation. Wir bezeichnen mit $G_i \subseteq G$ den Stabilisator von χ_{τ_i} . Es sei $N_i := \{g \in G \mid gW_i \subseteq W_i\}$. Zeigen Sie:

- Jedes W_i erzeugt V als G -Darstellung.
- Für jedes $g \in G$ ist $\rho(g)W_i \subseteq V$ ist eine irreduzible Darstellung von N .
- Der Charakter von $\rho(g^{-1})W_i$ ist χ_i^g und es gibt ein j mit $\chi_i^g = \chi_j$.
- Es gilt $N \subseteq N_i \subseteq G_i$.
- Alle W_i haben die gleiche Dimension.
- Es gilt für eine natürliche Zahl $e \geq 1$

$$\chi_{\text{Res}_N^G \rho} = e \cdot \sum_{i \in I} \chi_i,$$

wobei I ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der W_1, \dots, W_n nummeriert.

(g) Wenn $e = 1$, dann gilt $G_i = N_i$ und $\text{Ind}_{N_i}^G W_i \cong V$.

(h) Im allgemeinen Fall ist $W'_i := G_i W_i \subseteq V$ eine G_i -Unterdarstellung von V der Dimension $e \cdot \dim W_i$ und es gilt $V \cong \text{Ind}_{G_i}^G W'_i$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Für jede irreduzible Darstellung ρ der S_n gilt:

$\text{Res}_{A_n}^{S_n} \rho$ ist reduzibel $\iff \rho \cong \text{Ind}_{A_n}^{S_n} \tau$ für eine irreduzible Darstellung τ der A_n .

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 2.

Abgabe: Am Freitag, den 19.06.2015, in der Übung an die Übungsleiterin.