Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dr. Jingwei Zhao
24.06.2015

Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Übungsblatt 5

Es seien T, T' zwei Young-Tableaux. Wir nennen T und T' äquivalent, in Zeichen $T \sim T'$, wenn die zugrundeliegenden Young-Diagramme λ, λ' von T, T' übereinstimmen und in jeder Zeile von T die gleichen Einträge wie in der gleichen Zeile in T' auftreten. Ein *Young-Tabloid* (bzw. λ-Tabloid) ist eine Äquivalenzklasse von Young-Tableaux (der Form λ).

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Das Young-Tabloid zum Young-Tableau T ist der Orbit $P_T \cdot T$.

(b) Die natürliche Aktion der S_n auf den λ-Tableaux induziert eine transitive Aktion auf der Menge $\mathcal{T}_\lambda$ der λ-Tabloide.

(c) Es existiert ein kanonischer Isomorphismus von S_n-Moduln
$$\mathrm{Ind}_{P_\lambda}^{S_n} \mathbf{1} \;\cong\; k[\mathcal{T}_\lambda].$$

(d) Für ein λ-Tableau T sei
$$e_T := \sum_{\sigma \in Q_T} \mathrm{sgn}(\sigma)[\sigma T]_\sim \;\in\; k[\mathcal{T}_\lambda].$$
Dann ist der von der Gesamtheit der e_T erzeugte Unterraum S_λ stabil unter S_n und die Menge der e_T für Standard-λ-Tableaux T bildet eine Basis von S_λ.

(e) S_λ ist irreduzibel und es gilt $S_\lambda \cong V_\lambda$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $n \geq 0$ definieren wir die n-te *Telephonzahl* $T(n)$ rekursiv wie folgt: $T(0) := T(1) := 1$ und $T(n) := T(n-1) + (n-1)T(n-2)$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie:

(a)
$$T(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k (n-2k)! k!}.$$

(b) Es gilt
$$\sum_\rho \dim_{\mathbb{C}} \rho = T(n),$$
wobei ρ die irreduziblen komplexen Darstellungen der S_n durchläuft.

(c) $T(n)$ ist die Anzahl der Standard-Young-Tableaux der Größe n.

Abgabe: Am Freitag, den 03.07.2015, in der Übung an die Übungsleiterin.