Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit Normalteilern $H, N \trianglelefteq G$. Des Weiteren sei $N \subseteq H$. Dann gilt:

a) N ist ein Normalteiler in H.

b) H/N ist ein Normalteiler in G/N.

c) $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Lösung Aufgabe 1:

a) N ist eine Gruppe, also wegen $N \subseteq H$ eine Untergruppe von H.
Sei nun $h \in H, n \in N$. Da N Normalteiler in G und $h \in H \subseteq G$ ist, ist $hnh^{-1} \in N$, was zu zeigen war.

b) H/N ist eine Gruppe nach a).
Seien nun $hN \in H/N, gN \in G/N$ beliebig (dabei sei $h \in H, g \in G$), dann ist $(gN)(hN)(gN)^{-1} = (ghg^{-1})N \in H/N$, da $ghg^{-1} \in H$, da H Normalteiler in G ist.

c) Nach den einfachen Vorüberlegungen a) und b) ist dies die Hauptaufgabe des Beweises.
π sei die Verkettung der kanonischen Projektionen $G \overset{\pi_1}{\mapsto} G/N \overset{\pi_2}{\mapsto} (G/N)/(H/N)$, also

$$\pi : G \to (G/N)/(H/N), g \mapsto (gN)H/N.$$

Als Verkettung surjektiver Gruppenhomomorphismen ist π selbst surjektiver Gruppenhomorphismus.
Was ist der Kern K von π? $g \in K \Leftrightarrow (gN)H/N$ ist trivial in $(G/N)/(H/N) \Leftrightarrow gN \in H/N \Leftrightarrow g \in H$.
Die Aussage folgt nun aus dem Homomorphiesatz.

Bemerkung: Dies ist der zweite Isomorphiesatz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* $[G, G]$ sei diejenige Untergruppe von G, die von allen *Kommutatoren* $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugt wird.

a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler in G.

b) Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ gilt: G/N abelsch $\Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$.
Insbesondere ist $G^{ab} := G/[G, G]$ abelsch.

c) Bezeichne $\pi : G \to G^{ab}$ die kanonische Projektion. Zeige, dass G^{ab} folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:
Für jede abelsche Gruppe H und jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : G^{ab} \to H$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

Lösung Aufgabe 2:

a) $[G, G]$ ist nach Definition eine Untergruppe von G.

Wir zeigen nun, dass für $g \in G$, $h \in [G, G]$ das Produkt $ghg^{-1} \overset{(!)}{\in} [G, G]$ liegt. Dies folgt direkt mit folgendem Trick, kann aber auch zu Fuß nachgerechnet werden, wobei zu beachten ist, dass h im Allgemeinen kein Erzeuger $xyx^{-1}y^{-1}$, sondern ein Produkt davon ist - man kann aber beweisen (und sollte dies tun, wenn man es verwenden will), dass es reicht, die Abgeschlossenheit für Erzeuger h zu zeigen.
Es ist $ghg^{-1}h^{-1} \in [G, G]$. Multiplikation mit h gibt sofort die Behauptung, denn $ghg^{-1}h^{-1} \in [G, G], h \in [G, G] \Rightarrow ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} \cdot h \in [G, G]$.

b) G/N abelsch $\Leftrightarrow xNyN = yNxN$ für alle $x, y \in G \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1}N = N$ für alle $x, y \in G \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in N$ für alle $x, y \in G \Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$.
Die zweite Aussage folgt dann sofort wegen $[G, G] \subseteq [G, G]$.

c) Die Aussage sieht kompliziert aus, folgt aber direkt aus dem Homomorphiesatz, denn für beliebiges $\varphi : G \to H$ ist $[G, G]$ im Kern von φ enthalten, denn wegen der Kommutativität von H gilt für jeden Erzeuger (und damit für jedes Produkt ebendieser):
$\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(x)\varphi(x^{-1})\varphi(y)\varphi(y^{-1}) = \varphi(xx^{-1})\varphi(yy^{-1}) = e_H$.
Die erste Aussage des Homomorphiesatzes garantiert nun die eindeutige Fortsetzung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimme $F_2/[F_2, F_2]$, wobei $F_2 = \langle x, y \rangle$ die freie Gruppe in zwei Erzeugern sei.
(Eine mögliche Vorgehensweise wäre, zunächst die UAE der freien Gruppe zu verwenden, um einen Gruppenhomomorphismus in eine bekannte Gruppe zu finden. Anschließend solltest du die Darstellung der Elemente als endliche Wörter verwenden, um den Kern des Gruppenhomomorphismus zu bestimmen.)

Lösung Aufgabe 3:
Behauptung: Die Faktorgruppe ist isomorph zur *freien abelschen Gruppe in zwei Erzeugern*, uns besser bekannt als $\mathbb{Z}^2$.
Die UAE der freien Gruppe gibt einen Gruppenhomomorphismus φ von $F_2 \to \mathbb{Z}^2$, der x auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und y auf $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ abbildet.
Diese Fortsetzung bildet $w \in F_n$ auf $\begin{pmatrix}\#_x(w)\\\#_y(w)\end{pmatrix}$ ab, wobei $\#_x, \#_y$ jeweils die x bzw y (mit Vorzeichen!) in w zählen.
Der Gruppenhomorphismus ist surjektiv, denn für $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ ist etwa $x^a y^b$ ein Urbild unter φ.
Die Behauptung folgt aus dem Homomorphiesatz, wenn wir $\text{Kern}(\varphi) = [F_2, F_2] =: K$ zeigen.

„$\supseteq$“ folgt wieder direkt aus der Kommutativität von $\mathbb{Z}^2$, analog zu 2c).
(Alternativ sieht man das auch an der Definition von φ, wenn man sich erinnert, wie das Inverse eines Wortes gebildet wird. Ein Erzeuger $ghg^{-1}h^{-1}$ von $[F_2, F_2]$ ist Element von K, denn die Anzahl der x in g bzw. g^{-1} heben sich weg, ebenso in h und h^{-1}, gleiches gilt für y.)

„$\subseteq$:" Wir definieren die Wortlänge $l(w)$ als (eindeutige) Anzahl der x- und y-Potenzen, die in der eindeutigen gekürzten Darstellung von w auftauchen. Formaler formuliert heißt das folgendes:
Wir können w eindeutig darstellen als $w = x^{d_1}y^{d_2}...x^{d_{n-1}}y^{d_n}$, wobei d_1, d_n gegebenenfalls 0 sind, $d_2, ..., d_{n-1} \neq 0$. Dann ist

$$l(w) = \begin{cases} n & \text{für } d_1, d_n \neq 0 \\ n-1 & \text{für } d_1 = 0, d_2 \neq 0 \text{ oder } d_1 \neq 0, d_2 = 0 \\ n-2 & \text{für } d_1 = d_2 = 0 \end{cases}.$$

Wir zeigen nun per Induktion nach der Länge, dass jedes Wort aus K in $[F_2, F_2]$ enthalten ist.
Für $l(w) = 0$ ist die Sache klar, denn dann ist $w = 1$ das triviale Wort.
Man mache sich klar, dass die Fälle $l(w) = 1, 2, 3$ nicht auftreten können für Wörter aus dem Kern.
Dies reicht als Induktionsanfang, aber der Fall $l(w) = 4$ ist noch interessant und wir betrachten ihn noch gesondert: w ist dann von der Form $w = x^{d_1}y^{d_2}x^{d_3}y^{d_4}$ oder $w = y^{d_2}x^{d_3}y^{d_4}x^{d_5}$, aber in beiden Fällen sieht man - da sich die Potenzen bei x und y jeweils zu 0 addieren müssen - dass in Wirklichkeit schon ein Erzeuger von $[F_2, F_2]$ dasteht.

Induktionsschritt: Sei $l(w) = n$ für ein $n \geq 5$ und die Aussage richtig für alle Längen $< n$. (Tatsächlich reicht hier der Fall $n-1$ nicht.)
Ohne Einschränkung beginnt w mit x, der andere Fall verläuft analog. Dann aber ist $w = x^{d_1}y^{d_2}x^{d_3} \cdot w'$.
Betrachte $w'' = y^{d_2}x^{d_1}y^{-d_2}x^{-d_1} \cdot w = y^{d_2}x^{d_1+d_3} \cdot w'$.
Wegen $y^{d_2}x^{d_2}y^{-d_2}x^{-d_1} \in K$ ist w'' weiterhin im Kern enthalten, aber offensichtlich ist $l(w'') < l(w)$ (für $d_1 = -d_3$ kann die Länge dabei um mehr als eins kürzer werden, weswegen wir die stärkere Induktionsvoraussetzung benötigt haben) und nach Induktionsvoraussetzung $w'' \in [F_2, F_2]$.
Da aber auch $y^{d_2}x^{d_2}y^{-d_2}x^{-d_1} \in [F_2, F_2]$ gilt, ist somit auch $w \in [F_2, F_2]$ enthalten, was zu zeigen war.

Nachtrag: Dieses Verfahren ist konstruktiv, man erhält tatsächlich eine Darstellung als Produkt von Kommutatoren für ein beliebiges Kernelement. Dies kann gut an einem Beispiel nachvollzogen werden. Was hier in Wirklichkeit passiert, ist viel einfacher, als es formal erscheinen mag, wie einem schon am anschaulich völlig offensichtlichen Begriff der Länge klar sein sollte.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir einsehen, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$ eine einfache Gruppe ist. Zunächst zeigen wir, dass jeder Normalteiler N von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit $\{\pm I_2\} \subsetneq N$ bereits ganz $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist.

a) Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ durch alle Matrizen der Typen $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ mit $* \in \mathbb{C}$ erzeugt wird.

b) Sei $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ beliebig. Zeige, dass es ein $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gibt, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan'scher Normalform ist.

c) Sei nun $A \in N, A \neq \pm I_2$. Betrachte zwei Fälle für die Jordan'sche Normalform. Zeige, dass in beiden Fällen alle Matrizen aus a) in N enthalten sind, und folgere, dass $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gilt.

d) Zeige, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine einfache Gruppe ist.

Lösung Aufgabe 4:

a) Die Matrizen aus der Aufgabenstellung sind Additionsmatrizen[1], wie man sie aus der linearen Algebra kennt. Insbesondere sind ihre Inversen wieder solche Matrizen, etwa $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -* \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ beliebig. A ist genau dann Produkt von Additionsmatrizen, wenn A durch Multiplikation (von links und rechts) in die Einheitsmatrix oder eine Additionsmatrix überführt werden kann. Dies können wir uns leicht durch Gauß-Algorithmus-Schritte überlegen.

Fall 1: Sei $c \neq 0$. Durch Addition des $\frac{1-a}{c}$-fachen der zweiten Zeile auf die erste kann A in die Form

[1] Trotz des Namens sollte man aber nie vergessen, dass wir die multiplikative Verknüpfung in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ haben, die Addition von Zeilen (bzw. Spalten) entspricht doch einer Multiplikation mit einer geeigneten Matrix!

$A' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ c & d \end{pmatrix}$ gebracht werden.

Weiterhin kann nun das $-c$-fache der ersten Zeile auf die zweite Zeile addiert werden. Wir erhalten dann eine Matrix vom Typ $A' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$.

Da die Determinante in jedem Schritt 1 beträgt, muss bereits $d' = 1$ sein und A'' ist bereits eine der gegebenen Matrizen und wir sind fertig.

Fall 2: $c \neq 0$. Wegen $\det(A) = 1$ muss $a \neq 0$ sein und Addition der ersten Zeile auf die zweite Zeile bringt uns sofort in den Fall 1.

b) Erinnern wir uns an die lineare Algebra, dann wissen wir, dass es in jedem Fall ein $S_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gibt, sodass $S_1^{-1}AS_1$ in Jordan'scher Normalform vorliegt.

Die Determinante $\det(S_1)$ besitzt eine Wurzel x in $\mathbb{C}$. Setze $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$.

Nach dem Determinantenmultiplikationssatz besitzt $S = DS_1$ Determinante 1 und da D im Zentrum von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ liegt, ist $S^{-1}AS = S_1^{-1}D^{-1}ADS_1 = S_1^{-1}AS_1$ in Jordannormalform, wir haben also eine passende Matrix S gefunden.

c) N ist unter Konjugation in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ abgeschlossen, desweiteren sind Matrizen mit gleicher Jordannormalform konjugiert in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, vergleiche b).

Wir folgern, dass jede Matrix, die die gleiche Jordannormalform wie eine Matrix aus N hat, ebenfalls in N enthalten ist und müssen dies nur für die Additionsmatrizen aus Aufgabenteil a) zeigen.

Die Aussage ist klar für die Einheitsmatrix ($* = 0$), alle anderen Matrizen haben die Jordannormalform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Dabei wollen wir uns nicht streitenn, ob der Einser über oder unter der Diagonalen steht, denn diese beiden Normalformen sind natürlich ähnlich, auch wenn uns die LA dies vielleicht verschwiegen hat.)

A hat die Eigenwerte λ und $\frac{1}{\lambda}$, denn die Determinante ist 1.

Fall 1: A hat doppelten Eigenwert 1. Da A nicht die Einheitsmatrix ist, muss die Jordannormalform bereits $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein.

Fall 2: A hat doppelten Eigenwert -1. Wegen $-I \in N$, ist dann auch $-A$ in N mit doppeltem Eigenwert 1 und wir sind im Fall 1.

Fall 3: $\lambda \neq \frac{1}{\lambda}$, dann ist die Jordannormalform von A die Diagonalmatrix $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, die selbst in N enthalten ist.

Die Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ besitzt die gleiche Jordannormalform (denn $\lambda \neq \frac{1}{\lambda}$), ist also auch in N enthalten.

Mit $A_1, A_2 \in N$ ist auch $A_2 \cdot A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ und wir sind im Fall 1.

d) Sei $M \trianglelefteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ein nichttrivialer Normalteiler. Das Urbild $N := \pi^{-1}(M)$ unter der kanonischen Projektion $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist ein Normalteiler (einfache Übung zum Selbermachen oder ein gutes Tutoriumsthema...).

Es ist $\overline{I} \in M$, also $\pm I \in M$, desweiteren ist M nichttrivial, also enthält auch N eine weitere Matrix A. Nach Aufgabenteil c) ist also $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Die lineare Algebra sagt uns dann aber, dass dann auch M bereits die ganze Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sein musste, da π surjektiv ist. (Wer sich nicht mehr erinnert, schaue auf das erste oder zweite Übungsblatt aus der linearen Algebra über surjektive Abbildungen oder überlege sich das geschwind neu.)