Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $T \subseteq M$ Mengen und $\varphi : T \to M$ eine injektive Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass φ injektiv auf ganz M fortgesetzt werden kann, wenn T endlich ist.

b) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Endlichkeit von T eine wesentliche Voraussetzung ist.

Hinweis: In a) könnte es hilfreich sein, zunächst auch M als endlich anzunehmen.

Lösung Aufgabe 1

a) **Fall 1:** Sei zunächst M ebenfalls endlich. Die Aussage lässt sich dann direkt über Mächtigkeiten beweisen.
Wegen der Injektivität von φ ist $\varphi : T \mapsto \varphi(T)$ eine Bijektion, insbesondere sind T und $\varphi(T)$ gleichmächtig und wegen der Endlichkeit von M gilt $|M \setminus T| = |M| - |T| = |M| - |\varphi(T)| = |M \setminus \varphi(T)|$.
Wir finden also eine Bijektion φ' zwischen den gleichmächtigen Mengen $|M \setminus T|$ und $|M \setminus \varphi(T)|$.
Eine injektive Fortsetzung (sogar Bijektion) erhalten wir dann durch

$$f : x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in T \\ \varphi'(x) & \text{für } x \in M \setminus T \end{cases}$$

Fall 2: Für beliebiges M betrachten wir die endliche Teilmenge $T \cup \varphi(T)$. $T \subseteq T \cup \varphi(T)$ erfüllt die Voraussetzungen an den Fall 1, denn φ kann als Abbildung von T nach $T \cup \varphi(T)$ aufgefasst werden.
Nach Fall 1 erhalten wir eine injektive Abbildung f auf $T \cup \varphi(T)$, die φ fortsetzt.
Diese wiederum kann auf ganz $M \setminus (T \cup \varphi(T))$ durch die Identität fortgesetzt werden:

$$f' : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in T \cup \varphi(T) \\ x & \text{für } x \in M \setminus (T \cup \varphi(T)) \end{cases}$$

Da beide Teilabbildungen injektiv sind und der Bildbereich disjunkt ist, ist die Fortsetzung injektiv.

b) Wähle etwa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Wir finden eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$, etwa $1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto -1, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto -2, ...$
Da diese Abbildung surjektiv ist, können wir sie nicht auf ganz $\mathbb{Z}$ injektiv fortsetzen, da etwa das Bild von 0 bereits im Bild von $\mathbb{N}$ enthalten sein müsste.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien X, Y und Z drei Mengen. Konstruieren Sie eine Bijektion

$$\mathrm{Abb}(X \times Y\ ,\ Z) \to \mathrm{Abb}(X,\ \mathrm{Abb}(Y, Z)).$$

Lösung Aufgabe 2
Wir geben in beide Richtungen eine Abbildung an und rechnen nach, dass diese invers zueinander sind. Wir erinnern uns, dass zwei Abbildungen gleich sind, wenn sie elementweise gleich sind.

Vorbemerkung: Das Nachrechnen ist eigentlich nicht schwer, allerdings muss man genau arbeiten. Man sollte sich vor allem stets klar machen, aus welcher Menge die aufgeführten Abbildungen kommen, welche Elemente eigentlich eingesetzt werden müssen. An den Stellen, an denen die Definition einer der beiden Abbildungen eingeht, wird dies in der Musterlösung über dem Gleichheitszeichen dargestellt. $\overset{\psi}{=}$ *bedeutet also, dass an dieser Stelle die Definition der Abbildung* ψ *eingeht.*
In dieser Musterlösung wurden viele Klammern gesetzt, die helfen sollen, zu verstehen, was nun genau in welche Abbildung eingesetz werden muss. Mit etwas Erfahrung können einige Klammern weggelassen werden, was den Lesefluss verbessern wird.

ψ : $\mathrm{Abb}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y, Z))$ sei gegeben durch $\big(\psi(\varphi)\big)(x) : y \mapsto \varphi(x, y) \in \mathrm{Abb}(Y, Z)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Abb}(X \times Y, Z), x \in X, y \in Y$.
Einer Abbildung $\varphi(*, *) : X \times Y \to Z$ wird also für jedes $x \in X$ die Abbildung $\varphi(x, *) : Y \to Z$ zugeordnet.

Umgekehrt sei $\xi : \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y, Z)) \to \mathrm{Abb}(X \times Y, Z)$ gegeben durch $\xi(\varphi)(x, y) = \big(\varphi(x)\big)(y)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y, Z)), x \in X, y \in Y$.

Schritt 1 Wir betrachten $\xi \circ \psi : \mathrm{Abb}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Abb}(X \times Y, Z)$. Zu zeigen ist $\big(\xi \circ \psi\big)(\varphi) = \varphi$ für beliebiges $\varphi \in \mathrm{Abb}(X \times Y, Z)$, das heißt, für beliebige $x \in X, y \in Y$ ist $\big((\xi \circ \psi)(\varphi)\big)(x, y) \overset{!}{=} \varphi(x, y)$.
$\big((\xi \circ \psi)(\varphi)\big)(x, y) = \big(\xi(\psi(\varphi))\big)(x, y) \overset{\xi}{=} \big((\psi(\varphi))(x)\big)(y) \overset{\psi}{=} \varphi(x, y)$.

Schritt 2 Wir betrachten $\psi \circ \xi : \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y, Z)) \to \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y, Z))$. Zu zeigen ist $\big(\psi \circ \xi\big)(\varphi) = \varphi$ für beliebiges $\varphi \in \mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}(Y, Z))$, das heißt, für beliebiges $x \in X$ ist $\big((\psi \circ \xi)(\varphi)\big)(x) \overset{!}{=} \varphi(x)$ (als Abbildung!), das wiederum heißt, $\Big(((\psi \circ \xi)(\varphi))(x)\Big)(y) \overset{!}{=} \Big(\varphi(x)\Big)(y)$ für alle $y \in Y$.
$\Big(((\psi \circ \xi)(\varphi))(x)\Big)(y) = \Big((\psi(\xi(\varphi)))(x)\Big)(y) \overset{\psi}{=} (\xi(\varphi))(x, y) \overset{\xi}{=} (\varphi(x))(y)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei M eine Menge und $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller reellwertigen Abbildungen auf M.
Weiter sei V^* der Dualraum von V.
Denken Sie noch einmal über die zweite Aufgabe nach und geben Sie eine injektive Abbildung von M nach V^* an.

Lösung Aufgabe 3
Die naheliegende Zuordnung $M \mapsto V^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, die ein $m \in M$ auf die Einsetzabbildung φ_m abbildet, tut es. Dabei ordnet φ_m einer Abbildung $\psi : M \to \mathbb{R}$ den Funktionswert $\psi(m)$ zu.

Für alle $m \in M$ ist φ_m tatsächlich ein Homomorphismus, denn für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_m(a\psi_1 + \psi_2) = (a\psi_1 + \psi_2)(m) = a\psi_1(m) + \psi_2(m) = a\varphi_m(\psi_1) + \varphi_m(\psi_2)$.

Es verbleibt zu zeigen, dass die Abbildung injektiv ist. Die Aussage ist klar für $M = \emptyset$, also ist ohne Einschränkung M nicht leer.
Für jedes $m \in M$ sei $\psi_m \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ die Indikatorfunktion mit $\psi_m(m) = 1, \psi_m(n) = 0$ für $n \neq m$.
Offensichtlich ist $\varphi_m(\psi_n)$ genau dann 1, wenn $n = m$ ist, für $n \neq m$ sind dann wegen $1 = \varphi_m(\psi_m) \neq \varphi_n(\psi_m) = 0$ die zugehörigen Abbildungen verschieden, die Zuordnung ist injektiv.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Erinnern Sie sich an die Definition sowie die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des *Produktes von Mengen* aus der ersten Übung. Wir definieren nun analog das *Koprodukt von Mengen.*

Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Das *Koprodukt* der Mengen M_i ist eine Menge X versehen mit Abbildungen $\alpha_i : M_i \to X$ für alle $i \in I$ mit folgender universellen Abbildungseigenschaft (UAE):
Ist C eine weitere Menge mit Abbildungen $f_i : M_i \to C$, so gibt es genau eine Abbildung $g : X \to C$ mit der Eigenschaft $g \circ \alpha_i = f_i$ für alle $i \in I$.

Zeigen Sie, dass das Koprodukt stets existiert und bis auf Bijektion eindeutig ist.

Hinweis: Um die UAE des Koproduktes zu verstehen, könnte es sinnvoll sein, ein Diagramm zu malen, etwa für $I = \{1, 2\}$.

Lösung Aufgabe 4

Existenz: Wir geben direkt eine Menge mit passenden Abbildungen an, die die UAE erfüllt. Die disjunkte Vereinigung $X = \dot{\bigcup} M_i$ mit den Einbettungen $\alpha_i : M_i \mapsto X, m \mapsto m$ tut es. (Disjunkte Vereinigung bedeutet, dass wir Elemente aus verschiedenen M_i unterscheiden.)
Seien nun $C, f_i : M_i \to C$ wie in der Aufgabe gegeben. Für jedes $m \in X$ gibt es ein eindeutiges M_i, so dass $m \in M_i$ das Urbild unter α_i ist. Offensichtlich muss nun $h(m) = h(\alpha_i(m)) = f_i(m)$ gewählt werden, es kann also nur eine Abbildung h mit $h \circ \alpha_i = f_i$ geben.
Diese Zuordnung liefert aber auch eine wohldefinierte Abbildung von X nach C, die das Diagramm nach Konstruktion kommutieren lässt.
Die disjunkte Vereinigung mit den kanonischen Einbettungen erfüllt also die UAE wie gefordert.

Eindeutigkeit: Die Eindeutigkeit wird genauso bewiesen, wie wir dies in der ersten Übung für das Produkt von Mengen gesehen haben.
Seien (X, α_i) und (Y, β_i) zwei Koprodukte der Mengen M_i. Die UAE von X induziert eine Abbildung $h_1 : X \to Y$ mit $h \circ \alpha_i = \beta_i$ für alle i, die UAE von Y induziert eine Abbhildung $h_2 : Y \circ X$ mit $h_2 \circ \beta_i = \alpha_i$.
Insgesamt gilt dann $(h_2 \circ h_1) \circ \alpha_i = h_2 \circ (h_1 \circ \alpha_i) = h_2 \circ \beta_i = \alpha_i$ für alle i, aber offensichtlich gilt ebenso $\mathrm{id}_X \circ \alpha_i = \alpha_i$. Die UAE von X sagt, dass es nur eine Abbildung mit $h \circ \alpha_i = \alpha_i$ geben kann, also muss $h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_X$ sein.
Mit einem analogen Argument gilt $h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_Y$ und somit sind X, Y (und die zugehörigen Abbildungen) bis auf Umbenennung durch h_1 bzw. h_2 identisch.
(Man sollte auf jeden Fall ein Bild malen, um diesen Beweis zu verstehen!)